Capítulo Undécimo
DE CAMPESINO A PRESUMIDO

LAPLACE

Todos los efectos de la naturaleza son tan sólo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables.
S. Laplace

El marqués Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) no había nacido campesino ni tampoco murió como un esnob. Sin embargo, salvo pequeños detalles de segundo orden, su ilustre carrera queda comprendida dentro de los límites indicados, y desde este punto de vista posee su máximo interés como un ejemplar de la humanidad.

Como astrónomo matemático Laplace ha sido justamente llamado el Newton de Francia; como matemático puede ser considerado como, el fundador de la fase moderna del Cálculo de probabilidades. Por lo que se refiere al lado humano, es quizá la más notable refutación de la superstición pedagógica de que las nobles empresas ennoblecen necesariamente el carácter de un hombre. Sin embargo, a pesar de todos sus puntos flacos, su ansia por los títulos, su flexibilidad política y *su* deseo de brillar en el foco constantemente cambiante de la estimación pública, Laplace tiene en su carácter elementos de verdadera grandeza. No podemos creer todo lo que dijo acerca de su abnegada devoción por la verdad en bien de la verdad, y podemos sonreír ante la afectación con que pronunció sus sentenciosas y últimas palabras. "Lo que sabemos no es mucho; lo que ignoramos es inmenso", en un esfuerzo por recoger en un bello epigrama las palabras de Newton referentes al niño que juega en la playa, pero no podemos negar que Laplace, en su generosidad con los desconocidos principiantes, no era otra cosa que un político tornadizo e ingrato. Por echar una mano a un joven, Laplace una vez se traicionó a sí mismo.

Poco es lo que sabemos de los primeros años de Laplace. Sus padres eran campesinos que vivían en Beaumont-en-Auge, Departamento de Calvados, Francia, donde Pierre-Simon nació el 23 de marzo de

1749. La oscuridad que envuelve la infancia y juventud de Laplace es debida a su propio snobismo: estaba avergonzado de sus humildes padres e hizo todo lo posible para ocultar su origen campesino.

Laplace tuvo la posibilidad de triunfar gracias al interés de vecinos poderosos, que posiblemente oyeron hablar de su notable talento que le destacaba en la aldea. Se dice que sus primeros triunfos tuvieron lugar en las discusiones teológicas. Si esto es cierto, constituye un interesante preludio al ateísmo algo agresivo de su madurez. Se dedicó precozmente a la Matemática. Existía una Academia militar en Beaumont, a la que asistió Laplace como externo, y en la cual se dice que enseñó Matemática durante cierto tiempo. Una dudosa leyenda afirma que la memoria prodigiosa del joven atrajo más atención que su capacidad matemática, y fue la causa de las entusiastas recomendaciones que llevó a París cuando, teniendo 18 años, sacudió de sus zapatos el polvo de Beaumont para salir en busca de fortuna. Consideraba en mucho su capacidad, pero quizá esa estimación no era excesiva. Con justificada auto confianza, el joven Laplace llegó a París para conquistar el mundo matemático.

Llegado a París, Laplace quiso visitar a D'Alembert para presentarle las recomendaciones de que era portador. No fue recibido. D'Alembert no se interesaba por los jóvenes que sólo llegaban recomendados por gentes eminentes. Con una notable visión, extraordinaria para un joven, Laplace se dio cuenta de la causa. Volvió a su hospedaje y escribió a D'Alembert una maravillosa carta sobre los principios generales de la Mecánica. Había puesto el dedo en la llaga. En su contestación invitando a Laplace a que le visitara, D'Alembert escribía: "Señor, veréis que he prestado poca atención a vuestras recomendaciones; no las necesitáis, vuestra propia presentación ha sido lo mejor. Es suficiente para mí. Mi apoyo es debido a ella". Pocos días más tarde, gracias a D'Alembert, Laplace fue nombrado profesor de matemática en la Escuela Militar de París.

Laplace pudo ahora entregarse a la obra de su vida, la aplicación detallada de las leyes de la gravitación de Newton a todo el sistema solar. Si no se hubiera dedicado a otra cosa podría haber sido más grande de lo que fue. Laplace describe cómo le gastaría ser, en una carta dirigida a D'Alembert en 1777, cuando tenía 27 años. La descripción que Laplace hace de sí mismo es una de las más extrañas mezclas de verdad y fantasía que un hombre puede haber realizado siguiendo el auto análisis.

"Siempre he cultivado la Matemática por gusto, más que por deseo de vana reputación, declara. Mi mayor diversión ha sido estudiar la vida de los inventores para comprender su genio y ver los obstáculos con que han tropezado y cómo los han vencido. Entonces me coloco en su lugar y me pregunto cómo hubiera procedido yo para vencer esos mismos obstáculos, y aunque esta sustitución, en la gran mayoría de los casos ha sido humillante para mi amor propio, el placer de regocijarme en sus triunfos ha sido una, amplia reparación de esta pequeña humillación. Si soy suficientemente afortunado para añadir algo a sus obras, atribuyo todo el mérito a sus primeros esfuerzos, persuadido de que en mi posición ellos habrían ido mucho más lejos que yo..."

Puede admitirse la primera parte, pero por lo que se refiere al resto, este presumido y pequeño ensayo, es digno de un muchachito de 10 años para dirigirse a un sencillo maestro de la escuela dominical. Nótese particularmente la generosa atribución de sus propios "modestos triunfos" a la obra anterior de sus predecesores. Nada más lejos de la verdad que esta supuesta confesión. En realidad, Laplace robó de una manera escandalosa, a la derecha y a la izquierda, y siempre que podía metía sus manos en la obra de sus contemporáneos y predecesores. Por ejemplo, de Lagrange tomó el concepto fundamental de potencias (que luego explicaremos); de Legendre, todo lo que necesitaba en el camino del Análisis; y, finalmente, en su obra maestra, la *Mécanique Céleste,* omitió deliberadamente las referencias a los trabajos de los otros autores, incorporándolos a los suyos, con la intención de que la posteridad pudiera creer que él fue quien creó la teoría matemática de los cielos. Newton, como es natural, tenía que ser mencionado repetidamente. Pero Laplace podría haber sido algo más generoso, pues sus propias contribuciones colosales a la dinámica del sistema, solar, fácilmente oscurecen la obra de aquellos a quienes él ignora.

Las complicaciones y dificultades del problema, abordado por Laplace no pueden ser comprendidas por quien no se haya planteado algún problema similar. Al hablar de Lagrange hemos mencionado el problema de los tres cuerpos. La obra que Laplace emprendió era semejante, pero en mayor escala. Tenía que estudiar partiendo de la ley newtoniana, los efectos combinados de las perturbaciones de todos los miembros de la familia de los planetas solares sobre sí mismos y sobre el Sol. ¿Podrá Saturno, debido a la disminución aparentemente continua de su movimiento medio, perderse en el espacio, o continuará siendo miembro de la familia solar? ¿Las aceleraciones de Júpiter y de la Luna causarán en definitiva que el primero se precipite en el Sol y que la segunda se destruya sobre la Tierra? ¿Los efectos de estas perturbaciones serán acumulativos o serán periódicos y conservadores? Estos y otros enigmas semejantes constituyen detalles del gran problema: ¿Es estable o inestable el sistema solar? Se acepta que la ley de Newton de la gravitación es en realidad universal, y la única que gobierna los movimientos de los planetas.

El primer paso importante dado Por Laplace hacia el problema general fue dado en 1773, teniendo 24 años, al demostrar que las distancias medias de los planetas desde el Sol son invariables dentro de ciertas ligeras variaciones periódicas.

Cuando Laplace abordó el problema de la estabilidad, la opinión de los técnicos era neutral. El mismo Newton creía que la intervención divina podría ser necesaria, de cuando en cuando, para restablecer el orden del sistema solar y evitar su destrucción, o disolución. Otros, como Euler, impresionados por las dificultades de la teoría lunar (movimientos de la Luna), más bien dudan que los movimientos de los planetas y sus satélites puedan ser explicados por la hipótesis de Newton. Las fuerzas involucradas serían excesivamente numerosas, y sus reciprocas interacciones demasiado complicadas para poder establecer una conjetura razonable. Hasta que Laplace *demostró* la estabilidad del sistema, cualquier hipótesis podría ser buena.

Para eliminar aquí a objeción, que el lector sin duda se habrá ya planteado, puede decirse que la solución de Laplace al problema de la estabilidad es únicamente aceptable para el sistema solar altamente idealizado que Newton y él imaginaron. La fricción de las mareas (que actúan como un freno sobre la rotación diurna), entre otras cosas, era totalmente ignorada. Desde que la *Mécanique Céleste* fue publicada, hemos sabido muchas cosas acerca del sistema solar que Laplace no conocía. Probablemente no será exagerado afirmar que aún está sin resolver el problema de la estabilidad para el verdadero sistema solar tan opuesto al ideal de Laplace. De todos modos, aunque los especializados en la mecánica celeste estén en desacuerdo, la opinión razonada tan sólo puede ser emitida por ellos.

Como una cuestión de temperamento, algunos creen que la concepción de Laplace de un sistema solar eternamente estable, repitiéndose los ciclos complicados de sus movimientos de un modo eterno y sin variaciones, es una pesadilla tan deprimente como interminable. Estos disconformes podrán encontrar un consuelo al saber que el Sol probablemente explotará algún día como una nova. Entonces, la estabilidad cesará de perturbarnos, y todo se transformará repentinamente en gases perfectos.

Por su brillante iniciación Laplace obtuvo el primer honor importante de su carrera, cuando la Academia de Ciencias le nombró, teniendo 24 años, miembro asociado. Su ulterior vida científica es resumida por

Fourier: "Laplace dio a todas sus obras una dirección fija de la cual jamás se desvió; la imperturbable constancia de sus conceptos fue siempre el rasgo principal de su genio. Se hallaba ya [cuando comenzó a estudiar el sistema solar] en el extremo del Análisis matemático, conociendo todo lo que hay más ingenioso en él, y no había nadie más competente que Laplace para extender su dominio. Resolvió un capital problema de la astronomía [que comunicó a la Academia en 1773], y decidió dedicar todo su talento a la astronomía matemática, que él estaba destinado a perfeccionar. Meditó profundamente, sobre su gran proyecto y pasó toda su vida perfeccionándolo con una perseverancia única en la historia de la ciencia. La amplitud del tema es paralela a la magnitud de su genio. Se dedicó a componer el *Almagesto* de su época: la *Mécanique Céleste;* y su obra inmortal supera a la de Ptolomeo en el mismo grado en que la ciencia analítica [Análisis matemático] de los modernos supera los Elementos de Euclides.

Todo lo que Laplace hizo en el reino de la Matemática, estaba dedicado a auxiliar a la solución del gran problema. Laplace es el gran ejemplo de la sabiduría, para un hombre de genio, de dirigir todos los esfuerzos a un único objetivo digno de lo mejor que hay en un hombre. Algunas veces Laplace estuvo tentado de desviarse, pero no por largo tiempo. En una ocasión se sintió atraído por la teoría de números, pero rápidamente la abandonó, al darse cuenta de que sus enigmas probablemente le costarían más tiempo del que podría sustraer a sus estudios del sistema solar. Hasta su obra, que marca en una época, en la teoría de probabilidades, que a primera vista parece desviarse de sus principales devociones, se inspira en su necesidad de estudiar la astronomía matemática. Se dio cuenta de que la teoría era indispensable en todas las ciencias exactas, y creyó justificado desarrollarla hasta el límite de su capacidad.

La *Mécanique Céleste,* que une todos los trabajos matemáticos de Laplace en una síntesis razonada, fue publicada en partes durante un periodo de 26 años. En 1799 aparecieron dos volúmenes dedicados a los movimientos de los planetas, a sus formas (como cuerpos en rotación) y a las mareas; en otros dos volúmenes, en 1802 *Y* 1805 continúa la investigación que finalmente fue completada en el quinto volumen (1823-25). La exposición matemática es extraordinariamente concisa y algunas veces confusa. Laplace estaba interesado en los resultados, no en la forma de obtenerlos. Evitando resumir complicados cálculos matemáticos en forma breve e inteligible, frecuentemente omite todo razonamiento matemático, Pero al deducir la conclusión añade la observación optimista *"Il est aisé a voir". (Es fácil* de ver). Laplace mismo muchas veces es incapaz de repetir el razonamiento por el cual ha "visto" estas fáciles cosas, si no vuelve a dedicar algunos días a esa ardua labor. Hasta los lectores de más talento pronto se ven en la necesidad de lamentarse siempre que aparece la famosa frase, pues saben que es probable que se hallen ante una obra de muchas semanas.

Un resumen más comprensible de los resultados principales de la *Mécanique Céleste* apareció en 1796. Nos referimos a la clásica *Exposition du systeme du monde* (Exposición del sistema del mundo), que ha sido considerada como la obra maestra de Laplace, donde todas las fórmulas matemáticas son dadas de lado. En esta obra, como en la larga introducción no matemática (153 páginas en cuarto), al tratado sobre las probabilidades (tercera edición, 1820), Laplace reveló ser tan gran escritor como matemático. Quien desee tener una visión del objeto e importancia del Cálculo de probabilidades sin necesidad de argumentos técnicos, únicamente inteligibles para los matemáticos, no puede hacer cosa mejor que leer la introducción de Laplace. Mucho se ha añadido desde que Laplace escribió su obra, especialmente en los últimos años, y sobre todo en los fundamentos de la teoría de probabilidades; pero su exposición es aún clásica y constituye una expresión perfecta de al menos la parte filosófica del tema. La teoría no hay ni que decir que todavía no se ha completado, y parece que las nuevas generaciones tendrán aún mucho que hacer.

De pasada puede mencionarse un detalle interesante de los trabajos astronómicos de Laplace: la famosa hipótesis nebular del origen del sistema solar. Sin saber que Kant se había anticipado, Laplace (medio en broma, medio en serio) propuso la hipótesis en una nota. Su Matemática no era adecuada para un estudio sistemático, que no fue realizado hasta que Jeans, en el presente siglo, dio a la exposición una base científica.

Lagrange y Laplace, los dos hombres de ciencia franceses más eminentes del siglo XVIII, ofrecen un contraste interesante y una típica diferencia, que se ha dado cada vez más marcada al ampliarse la Matemática: Laplace pertenece a la clase de los físicos matemáticos, Lagrange a la de los matemáticos puros.

Poisson, por ser físico matemático, parece que considera a Laplace como el tipo más deseable: "Existe una diferencia profunda entre Lagrange y Laplace en toda su obra, trátese de un estudio de los números o de la libración de la Luna. Parece que Lagrange, en las cuestiones que trata, sólo ve la Matemática, de aquí el gran valor que da a la elegancia y a la generalidad. Laplace, consideró la Matemática como una herramienta, que modificó ingeniosamente para tratar con ella los problemas especiales que se presentasen. El primero era un gran matemático; el segundo un gran filósofo, que quería conocer la naturaleza sirviéndose de la Matemática superior".

Fourier (del que hablaremos más tarde) observa también la diferencia radical entre Lagrange y Laplace. Dentro de los más bien estrechos cauces "prácticos" de su esquema matemático, Fourier fue capaz, en su época, de estimar a Lagrange en su verdadero valor. - "Lagrange no fue sólo un gran matemático, fue también un gran filósofo. Durante toda su vida mostró, en la moderación de sus deseos, su inconmovible unión a los intereses generales de la humanidad, con la noble simplicidad de sus maneras y la elevación de su carácter, y finalmente con la exactitud y la profundidad de sus obras científicas".

Por venir de Fourier, este juicio es muy notable. Puede tener el sabor de la suave retórica que estamos habituados a escuchar en la oratoria francesa de las honras fúnebres, pero es cierto, al menos en la actualidad. La gran influencia de Lagrange sobre la Matemática moderna es debida a "la profundidad y exactitud de sus obras científicas", cualidades que algunas veces están ausentes en las obras maestras de Laplace.

Para la mayoría de, sus contemporáneos e inmediatos continuadores, Laplace ocupa un lugar más elevado que Lagrange. Esto era en gran parte debido a la magnitud del problema que Laplace abordó, el grandioso proyecto de demostrar que el sistema solar es una gigantesca máquina en perpetuo movimiento. Sin duda, un sublime proyecto, pero esencialmente ilusorio. No se sabía lo bastante acerca del verdadero universo físico en la época de Laplace -y ni siquiera se sabe en estos días- para dar al problema una significación real, y probablemente pasarán muchos años antes de que la Matemática esté suficientemente avanzada para interpretar la complicada masa de datos que ahora tenemos. Los astrónomos matemáticos continuarán, sin duda, trabajando con modelos idealizados de "el Universo" o con modelos infinitamente menos impresionantes del Sistema Solar, y continuarán inundándonos con informes alentadores o deprimentes referentes al destino de la humanidad; pero, finalmente, los resultados secundarios de sus investigaciones, la perfección de las herramientas puramente matemáticas por ellos ideadas, constituirán la contribución permanente para el avance de la ciencia (lo opuesto a la emisión de conjeturas), precisamente como sucedió en el caso de Laplace. 1 *Si* las palabras precedentes parecen muy radicales, consideremos lo que ha sucedido con la *Mécanique*

Céleste. ¿Puede realmente un matemático académico creer hoy que las conclusiones de Laplace acerca de la ,estabilidad del sistema solar son un exacto veredicto de la situación infinitamente complicada que Laplace reemplazó por un sueño idealizado? Posiblemente muchos no lo creen, pero ningún investigador de la física matemática duda de la importancia y utilidad de los métodos matemáticos desarrollados por Laplace para abordar su ideal.

Para citar un ejemplo, diremos que la teoría del potencial tiene más importancia hoy que lo que Laplace pudo soñar que tendría. Sin la Matemática de esta teoría tendríamos que detenernos, casi en los comienzos, en nuestro intento de comprender el electromagnetismo. De dicha teoría se desarrolla una vigorosa rama de la Matemática de los problemas de valor-límite, que en la actualidad tiene mayor significación para la ciencia física que toda la teoría de Newton de la gravitación. El concepto de potencial constituía una explicación matemática de primer orden, e hizo posible abordar problemas físicos que de otro modo hubieran sido inabordables.

El potencial es simplemente la función *u* en relación del movimiento de los fluidos y la ecuación de Laplace en el capítulo sobre Newton. La función *u* es aquí un "potencial velocidad"; si se trata de una ,cuestión de la fuerza de atracción universal de Newton,,u es un "potencial gravitatorio". La introducción del potencial en las teorías del movimiento de los fluidos de la gravitación, del electromagnetismo, etc., constituyó uno de los más amplios pasos dados en la física matemática. Tiene el efecto de sustituir las ecuaciones en derivadas parciales con dos o tres incógnitas por ecuaciones con una incógnita.

En 1785, teniendo 36 años, Laplace fue nombrado miembro ordinario de la Academia. Por muy importante que este honor fuera en la carrera de un hombre de ciencia, el año 1785 marca un jalón de todavía mayor importancia en la carrera de Laplace como hombre público. En dicho año, Laplace obtuvo el privilegio de someter a examen en la Escuela Militar, a un singular candidato de 16 años. Este joven estaba destinado a modificar los planes de Laplace, y a desviarlos de su confesada devoción por la Matemática hacia las aguas barrosas de la política. El nombre de este joven era Napoleón Bonaparte (1769-1821).

Laplace puede decirse que fue un espectador de la Revolución, que presenció gozando de relativa seguridad. Pero ningún hombre de su importancia y de su inquieta ambición podía escapar de los peligros. Si De Pastoret no está equivocado, tanto Lagrange como Laplace pudieron escapar de la guillotina tan sólo por el hecho de que fueron aprovechados para calcular las trayectorias en la artillería y para dirigir la preparación del nitro necesario para la fabricación de la pólvora, Ninguno de los dos se vio forzado a comer hierba, como les sucedió a otros sabios menos necesarios, ni tampoco incurrieron en el error de traicionarse a sí mismos, como ocurrió con su infortunado amigo Condorcet al pedir que le prepararan una aristocrática tortilla. No sabiendo cuántos huevos son necesarios para una tortilla normal, Condorcet pidió una docena. El cocinero preguntó a Condorcet cuál era su oficio: "¿Carpintero?. Muéstrame las manos. No eres carpintero". Ese fue el fin del íntimo amigo de Laplace, Condorcet. Fue envenenado en la prisión u obligado a suicidarse.

Después de la Revolución Laplace se entregó cada vez más a la política, posiblemente con la esperanza de "batir el récord" de Newton. Los franceses se refieren cortésmente a la "versatilidad" de Laplace como político. Este juicio es excesivamente modesto. Los defectos atribuidos a Laplace como político constituyen su verdadera grandeza en el astuto juego. Ha sido criticado por su incapacidad para mantener un cargo público en regímenes sucesivos sin cambiar su política. Un hombre que es suficientemente hábil para convencer a partidos opuestos de que es un leal defensor de quien en aquel momento se encuentra en el Poder, debe ser un político de una categoría más que mediana. Fueron los gobernantes los que en el juego demostraron su falta de capacidad. ¿Qué podemos pensar de un Director General de Correos republicano que concede los cargos más suculentos a los despreciables demócratas? Laplace obtuvo un cargo cada vez mejor cuando los gobiernos cambiaban. Tan sólo le costó transformar, de la noche a la mañana, su furioso republicanismo en ardiente realismo.,

Napoleón concedió a Laplace todas las distinciones y honores, incluyendo la cartera del Interior. Todas las órdenes napoleónicas adornaron el versátil pecho del matemático, entre ellas la Gran Cruz de la Legión de Honor y la Orden de la Reunión, siendo nombrado Conde del Imperio. ¿Y qué hizo Laplace cuando cayó Napoleón? Firmó el decreto que marcaba el derrumbe de su bienhechor.

Después de la restauración Laplace no tuvo dificultades en transferir su lealtad a Luis XVIII, especialmente cuando se sentó en la Cámara de los Pares como Marqués de Laplace. Luis reconoció los méritos de Laplace y en 1816 le nombró Presidente del comité para reorganizar la Escuela Politécnica.

Quizá las expresiones más perfectas del genio político de Laplace sean las que se encuentran en sus trabajos científicos. Es necesario ser un verdadero genio para acomodar la ciencia de acuerdo a la opinión política fluctuante. La primera edición de la *Exposition du systeme du monde* dedicada al Consejo de los Quinientos, termina con estas nobles palabras: "El mayor beneficio de las ciencias astronómicas es haber disipado errores nacidos de la ignorancia respecto de nuestras verdaderas relaciones con la naturaleza, errores todos los más fatales, dado que el orden social debe reposar únicamente sobre estas relaciones. La verdad **y** la justicia son sus bases inmutables. Lejos de nosotros la máxima peligrosa que puede ser algunas veces útil para engañar o esclavizar a los hombres más que para asegurar su felicidad. Experiencias fatales han demostrado en todas las épocas que estas sagradas leyes jamás han sido infringidas impunemente". En 1824, estas palabras son suprimidas, siendo sustituidas, por el Marqués de Laplace, con estas otras: "Conservemos con cuidado y aumentemos el número de estos conocimientos, deleite de los seres pensantes. Han producido importantes servicios para la navegación y la geografía, pero su mayor beneficio es haber disipado los temores producidos por los fenómenos celestes y haber destruido los errores nacidos de la ignorancia de nuestras verdaderas relaciones con la naturaleza, errores que pronto reaparecerán si la antorcha de las ciencias se extingue". En elevación de sentimientos hay poco que elegir en estas dos sublimes máximas. Esto es lo que puede anotarse en la columna del debe del libro de su vida, pero también en la columna del haber hay que citar un rasgo en el que Laplace superó a todos los cortesanos: su valor moral cuando sus verdaderas convicciones eran discutidas. La historia del diálogo de Laplace con Napoleón respecto de la *Mécanique Céleste* muestra al matemático tal cual era. Laplace presentó a Napoleón un ejemplar de la obra. Pensando confundir a Laplace, Napoleón llamó su atención hacia un aparente olvido. "Habéis escrito este enorme libro sobre el sistema del mundo, sin mencionar una sola vez al autor del Universo". "Señor, contestó Laplace, no he tenido necesidad de esa hipótesis". Cuando Napoleón refirió esto a Lagrange, el último contestó: *"¡Ah, pero es una bella hipótesis, explica muchas cosas!"*.

Supo erguirse ante Napoleón para decirle las verdades. Así ocurrió en una sesión del Instituto cuando Napoleón, en uno de sus momentos de mal humor, hizo estallar en lágrimas con su deliberada brutalidad al pobre anciano Lamarck.

También en la columna de los méritos de Laplace citaremos su sincera generosidad con los principiantes. Biot dice que cuando era joven leyó un trabajo ante la Academia, y que Laplace, que estaba presente, se acercó a él para comunicarle que había hecho idéntico descubrimiento, como podía comprobarlo en un manuscrito ya amarillo por el tiempo, aunque no lo había publicado. Recomendó a Biot mantener el secreto, incitándole a que se anticipara y publicase su trabajo. Este fue uno de los muchos actos semejantes que realizó. Los principiantes en la investigación matemática eran sus hijastros, como Laplace solía decir, pero los trataba como si fueran sus propios hijos.

Como un ejemplo de la falta de eficacia práctica de los matemáticos suele citarse la opinión de Napoleón acerca de Laplace, que, según se dice, fue expresada cuando Napoleón estaba prisionero en Santa Elena.

"Un matemático de primera fila -como era Laplace- se reveló rápidamente como un mediocre administrador; desde sus primeros actos vimos que nos habíamos engañado. Laplace no enfocaba las cuestiones desde su verdadero punto de vista; encontraba sutilezas por todas partes, tenía tan sólo ideas dudosas, y finalmente llevó a la administración el espíritu de lo infinitamente pequeño"

Este sarcástico testimonio fue inspirado por el breve desempeño -tan sólo seis meses- del cargo de Ministro del Interior. Recordemos, sin embargo, que Luciano Bonaparte necesitaba un cargo en este momento y fue quien sucedió a Laplace; es pues, posible que Napoleón haya racionalizado su inclinación bien conocida al nepotismo. El juicio de Laplace acerca de Napoleón no se conoce, pero quizá pudiera ser expresado en estos términos:

"Un soldado de primera categoría, Napoleón se reveló rápidamente tan sólo como un político mediocre; desde sus primeros actos vimos que estaba equivocado. Napoleón planteaba todas las cuestiones desde un punto de vista particular, sospechaba la traición en todas partes, pero, al mismo tiempo tenía una fe infantil en sus partidarios, y, finalmente, llevó el espíritu de la infinita generosidad a una cueva de bandidos".

¿Quién fue, al fin y al cabo, el administrador más práctico? ¿El hombre que no puede soportar el peso de sus victorias y que muere prisionero de sus enemigos, o el que continúa recogiendo riquezas y honores hasta el día de su muerte?

Laplace vivió sus últimos días en el cómodo retiro de sus propiedades en Arcueil, no lejos de París. Después de una breve enfermedad, murió el 5 de marzo de 1827 a los 78 años. Sus últimas palabras ya han sido mencionadas.

Capítulo duodécimo
AMIGOS DE UN EMPERADOR.

MONGE Y FOURIER


Gaspard Monge

No puedo deciros los esfuerzos a los que me he visto obligado para comprender algo de las figuras de Geometría descriptiva, que yo detesto.

Charles Hermite


Joseph Fourier

El teorema de Fourier no sólo es uno de los más bellos resultados del Análisis moderno, sino que puede decirse que proporciona un instrumento indispensable para el tratamiento de casi todas las cuestiones oscuras de la física moderna.

William Thomson y P. G. Tait

Las carreras de Gaspard Monge (1746-1818), y de Joseph Fourier (1768-1830) tienen un paralelo muy curioso y pueden ser consideradas conjuntamente. Desde el punto de vista matemático cada uno de ellos hizo una contribución fundamental: Monge inventó la Geometría descriptiva (que no debe ser confundida con la Geometría proyectiva de Desargues, Pascal y otros); Fourier inició la fase actual de la física matemática con sus clásicas investigaciones sobre la teoría de la conducción del calor.

Sin la Geometría de Monge, inventada al principio para ser usada en la ingeniería militar- todo el desarrollo de la maquinaria en el siglo XIX, quizá hubiera sido imposible. La Geometría descriptiva es la base de todos los dibujos de la mecánica y procedimientos gráficos que ayudan para llevar a la práctica la Ingeniería.

Los métodos iniciados por Fourier en su trabajo sobre la conducción del calor son de análoga importancia en los problemas del valor-límite, tronco de la física matemática.

Monge y Fourier, son pues, los responsables de una parte considerable de nuestra civilización. Monge desde el punto de vista práctico e industrial; Fourier desde el punto de vista científico. Pero hasta en la faceta práctica, los métodos de Fourier son actualmente indispensables, pues se emplean corrientemente en toda la ingeniería eléctrica y acústica (incluyendo la radiotelefonía) Por ser superiores a las reglas empíricas y métodos similares.

Debe ser recordado un tercer hombre, aunque no tengamos espacio para referir su vida: el químico Count Claude-Louis Berthollet (1748-1822), íntimo amigo de Monge, Laplace, Lavoisier y Napoleón. Con Lavoisier, Berthollet es considerado como uno de los fundadores de la química moderna. Él y Monge estaban tan unidos, que sus admiradores, cuando no se trataba de los trabajos científicos, no se molestaban en distinguirlos, y les llamaban simplemente Monge-Berthollet.

Gaspard Monge nació el 10 de mayo de 1746, en Beaune, Francia, siendo hijo de Jacques Monge, un afilador ambulante, que tenía un enorme respeto por la educación, y que envió a sus tres hijos a un colegio local. Los tres hijos fueron estudiantes distinguidos, pero Gaspard fue el genio de la familia. En el colegio (regido por una orden religiosa) Gaspard obtuvo regularmente el primer premio en todas las materias logrando la máxima distinción de ver inscrita después de su nombre, la calificación *puer aureus*.

A la edad de 14 años, la peculiar combinación de los talentos de Monge le permitió construir una máquina de bomberos. "¿Cómo puedes haber emprendido esta obra, sin una guía o un modelo para realizarlo?" le preguntaron algunos asombrados admiradores. La contestación de Monge permite comprender la faceta matemática de su carrera y gran parte de sus otras facetas. "Tengo dos métodos infalibles de triunfar. Una invencible tenacidad y dedos para trasladar mi pensamiento con fidelidad geométrica". Era en efecto un geómetra y un ingeniero innato con un don insuperable para representar mentalmente las complicadas relaciones del espacio.

Teniendo 16 años preparó por su propia iniciativa un maravilloso plano de Beaune, construyendo por sí mismo los instrumentos necesarios para este fin. Este plano fue el que abrió su camino.

Impresionados por su indudable inteligencia, los maestros de Monge le recomendaron para profesor de física en el Colegio de Lyon regido por su orden. Monge fue nombrado teniendo 16 años. Su afabilidad, paciencia y falta de afectación, aparte de sus sólidos conocimientos, hicieron de él un gran maestro. La orden le pidió que tomara sus votos para unir su vida a las de ellos. Monge consultó a su padre. El astuto afilador le recomendó prudencia.

Algunos días más tarde, al volver a su hogar, Monge conoció a un oficial de Ingenieros que había visto el famoso plano. El oficial solicitó de Jacques que enviara a su hijo a la Escuela militar de Méziêres. Por fortuna para la futura carrera de Monge el oficial no llegó a decir que, dado su humilde origen, jamás podría desempeñar un cargo. No sabiendo esto, Monge aceptó con gusto y marchó a Méziêres.

Monge supo pronto que es lo que le esperaba en Méziêres. Había únicamente veinte alumnos en la escuela, de los cuales se graduaban diez cada año como oficiales de ingenieros. El resto estaba destinado a los trabajos "prácticos", a las tareas secundarias. Monge no se quejó. Más bien estaba contento de que el trabajo rutinario de dibujar y trazar los planos le dejara tiempo para su Matemática. Una parte importante del curso se refería a la teoría de las fortificaciones, y los problemas planteados eran preparar las obras para que ninguna porción de ellas estuviera expuesta al fuego directo del enemigo. Los cálculos usuales exigían operaciones aritméticas interminables. Un día Monge trabajaba en la solución de un problema de este tipo, e inmediatamente lo entregó al oficial superior para que lo comprobase.

No pudiendo comprender que alguien fuera capaz de resolver el problema en ese tiempo, el oficial se negó a comprobar la solución. "No me voy a tomar la molestia de someter esa pretendida solución a fatigosas comprobaciones. El autor no ha tenido tiempo para agrupar las cifras. Puedo creer que haya quien tenga facilidad para el cálculo, pero no creo en milagros". Monge insistió, diciendo que no había utilizado la Aritmética. Su tenacidad venció, la solución fue comprobada y se vio que era correcta.

Este fue el comienzo de la Geometría descriptiva. Monge ocupó inmediatamente un cargo docente secundario para instruir a los futuros militares en el nuevo método. Problemas que habían sido antes verdaderas pesadillas, eran ahora tan simples como el A, B, C. Monge tuvo que jurar que no divulgaría su método, que durante quince años fue celosamente considerado como secreto militar. Tan sólo en 1794 le fue permitido enseñarlo públicamente en la Escuela Normal de París, donde Lagrange se hallaba entre los oyentes. La reacción de Lagrange ante la Geometría descriptiva fue igual a la de M. Jourdain, cuando descubrió que había estado hablando en prosa toda su vida. "Antes de oír a Monge, dijo Lagrange después de una conferencia, no sabía que yo sabia Geometría descriptiva".

La idea que hay tras de los conceptos de Monge aparece tan ridículamente simple para nosotros como le pareció a Lagrange. La Geometría descriptiva es un método de representar los sólidos y otras figuras del espacio tridimensional sobre un plano. Imaginemos primeramente dos planos en ángulo recto, por ejemplo, dos páginas de un libro abierto en un ángulo de 90 grados. Un plano es horizontal, el otro vertical. La figura que ha de ser representada se proyecta, en cada uno de estos planos, por líneas perpendiculares al plano. Existen así *dos* proyecciones de la figura; la que se halla sobre el plano horizontal se denomina plano de plantas, y la que se halla en el plano vertical, plano *de alzados*. El plano vertical se abate hasta que él y el plano horizontal estén en un plano (en el plano horizontal), como si se abriese el libro colocándolo sobre una mesa,

Las figuras del espacio se representan ahora por dos proyecciones sobre un plano: (el de la pizarra). Un plano, por ejemplo, se representa por sus trazas: las líneas rectas en que se cortan los planos vertical y horizontal antes de que el primero sea abatido; un sólido, por ejemplo un cubo, se representa por las proyecciones de sus lados y vértices. Las superficies curvas cortan los planos vertical y horizontal en curvas; estas curvas, o trazas de la superficie, representan la superficie sobre un plano.

Cuando estas figuras y otras igualmente sencillas se desarrollan, nos encontramos ante un método *descriptivo* que representa sobre una hoja de papel lo que ordinariamente vemos en el espacio de tres dimensiones. Un breve aprendizaje capacita al dibujante para leer tales representaciones tan fácilmente como cualquier individuo interpreta buenas fotografías. Esta fue la simple invención que revolucionó la ingeniería militar y el dibujo mecánico. Como en muchas de las otras cosas de la Matemática aplicada, su rasgo más notable es su sencillez". Existen muchas formas para desarrollar o modificar la Geometría descriptiva, pero todas ellas se remontan a Monge. El problema ha sido tan perfectamente estudiado que no tiene gran interés para los matemáticos profesionales.

Para acabar de referir las contribuciones de Monge a la Matemática antes de ocuparnos de su vida, recodaremos que su nombre es familiar a todos los estudiantes del segundo curso de Cálculo, en relación con la Geometría de las superficies. El gran paso dado por Monge fue la aplicación sistemática y brillante del Análisis a la investigación de la curvatura de superficies. En su teoría general de la curvatura, Monge preparó el camino a Gauss, quien a su vez inspiró a Riemann, que así pudo desarrollar la Geometría conocida con su nombre en la teoría de la relatividad.

Su obra sobre las ecuaciones diferenciales íntimamente relacionada con la llevada a cabo en Geometría, muestra también quién era este hombre. Años más tarde abandonó Méziêres, donde había hecho esta gran labor. Monge dio cuenta de sus descubrimientos a sus colegas de la Escuela Politécnica. Lagrange también estaba entre el público. "Querido colega, dijo a Monge después de la conferencia, habéis explicado algunas cosas tan interesantes que me hubiera gustado haber sido yo quien lo hiciera". En otra ocasión exclamó: "Con su aplicación del Análisis a la Geometría este demonio de hombre se hará inmortal y así fue, y es interesante observar que aunque otras cosas más urgentes desviaron su genio de la Matemática, jamás perdió su talento. Como todos los grandes matemáticos, Monge fue matemático hasta última hora.

En 1768, teniendo 22 años, Monge fue nombrado profesor de Matemática en Méziérês, y tres años más tarde, a la muerte del profesor de física, ocupó su lugar. Este doble trabajo poco representó para él. Poderosamente constituido y tan fuerte de cuerpo como de mente, Monge fue siempre capaz de realizar la labor de tres o cuatro hombres.

Su matrimonio parece una novela del siglo XVIII. En una recepción Monge oyó a un noble verter calumnias respecto a una joven viuda, por haberle rechazado. Abriéndose camino entre los invitados, Monge quiso aclarar si había oído bien. A la insolente pregunta "¿Qué le importa esto?", Monge respondió con un golpe en la mandíbula. No hubo duelo. Meses más tarde, en otra recepción, Monge admiraba a una joven encantadora. Al serle presentada reconoció su nombre, Madame Horbon, como el de la dama desconocida a la que había defendido La viuda, que tenía tan sólo 20 años, se negaba a casarse antes de que los asuntos de su marido muerto hubieran quedado arreglados. "No se preocupe por eso, aseguró Monge, he resuelto muchos problemas más difíciles en mi vida". Se casaron en el año 1777. Ella le sobrevivió, e hizo cuanto pudo para perpetuar su memoria, sin darse cuenta de que su marido había ya levantado su propio monumento mucho antes de conocerla. La mujer de Monge fue el único ser humano que le acompañó toda la vida. Hasta Napoleón, durante la última época, le abandonó debido a su edad.

Por esa época Monge comenzó a mantener correspondencia con D'Alembert y Condorcert. En 1770 estos dos hombres habían sugerido al gobierno que fundara un Instituto en el Louvre para el estudio de la Hidráulica. Monge fue llamado a París para desempeñar el cargo, con la condición de que dedicara la mitad de su tiempo a sus trabajos de Méziêres. Tenía entonces 34 años. Tres años más tarde pudo abandonar sus deberes en Méziêres, siendo nombrado juez de los candidatos para los nombramientos en la armada, cargo que desempeñó hasta el estallido de la Revolución en 1789.

Examinando retrospectivamente las carreras de todos estos matemáticos del período revolucionario no podemos menos de observar cuán ciegos estaban ellos y los demás para lo que ahora nos parece tan fácil. Nadie sospechaba que estaban sentados sobre una mina en la que la mecha se hallaba ya encendida. Posiblemente nuestros sucesores del año 2045, dirán lo mismo acerca de nosotros.

Durante seis años desempeñó el cargo en la armada y Monge demostró ser un juez incorruptible. Se atrajo el odio de los aristócratas, que le amenazaban con duras penas cuando reprobaba sin compasión a sus incompetentes hijos, pero a Monge poco le importaba. "Nombrad a cualquier otra persona para este cargo, si no os gusta la forma como lo desempeño". El resultado fue que la armada estaba ya dispuesta para desempeñar su papel en 1789.

Su origen y su conocimiento de las gentes de las clases elevadas que buscan favores inmerecidos hizo de Monge un revolucionario natural. Por experiencia directa conocía las corrupciones del viejo orden y la incapacidad económica de las masas, y creía que con el tiempo todo tendría que tomar un nuevo rumbo. Pero como la mayoría de los primeros liberales, Monge ignoraba que el populacho, cuando gusta de la sangre, tarda en quedar satisfecho. Los primeros revolucionarios tenían más fe en Monge que la que él mismo tenía. Contra su deseo se vio forzado a admitir el cargo de Ministro de Marina y de las Colonias el 10 de agosto de 1792. Era el hombre para el cargo, pero no era muy apetecible ser empleado público en el París de 1792.

El populacho estaba ya fuera de sí; Monge fue llevado al Consejo Ejecutivo Provisional para intentar imponer algunas medidas de gobierno. Por ser hijo del pueblo, Monge lo comprendía mejor que algunos de sus amigos; Condorcet, por ejemplo, que cautamente renunció a su cargo para salvar su cabeza. Pero existe pueblo y pueblo, y todos juntos forman "el pueblo". En febrero de 1793 Monge se hizo sospechoso de no ser suficientemente radical, y el 13 de ese mes dimitió para ser elegido el día 18 para un cargo. Cualquier día, durante aquellos tiempos difíciles, Monge hubiera podido subir al patíbulo. Pero jamás aduló a la ignorancia y a la incompetencia, y lanzó al rostro de sus críticos la réplica de que sabía lo que debía hacer, mientras que ellos no sabían nada. Su única angustia era que las disensiones en la patria dejaran a Francia inerme ante los ataques que podrían anular todos los beneficios de la Revolución.

Finalmente, el 10 de abril de 1793, Monge pudo dimitir para dedicarse a trabajos más urgentes. El previsto ataque era ya claramente visible.

Con los arsenales casi vacíos, la Convención comenzó a formar un ejército de 900.000 hombres para la defensa. Sólo existía una décima parte de las municiones necesarias y no había esperanza de importar los materiales requeridos, cobre y estaño para la preparación del bronce de los cajones, nitro para la pólvora y acero para las armas de fuego. "Dadnos nitro de la tierra, y en tres días cargaremos nuestros cañones, pidió Monge a la Convención. Perfectamente, respondió la Convención, pero ¿dónde iban a encontrar el nitro? Monge y Berthollet mostraron la forma de conseguirlo.

Toda la nación estaba movilizada. Bajo la dirección de Monge se enviaron instrucciones a todas las ciudades, granjas y aldeas de Francia diciendo al pueblo lo que debía hacer. Dirigidos por Berthollet, los químicos inventaron nuevos y mejores métodos para refinar la materia prima y simplificar la preparación de la pólvora. Toda Francia llegó a ser una vasta fábrica de pólvora. Los químicos mostraron también al pueblo donde encontrar estaño y cobre: en el metal de los relojes y en las campanas de las iglesias. Monge era el alma de todo esto. Con su prodigiosa capacidad para el trabajo, dedicaba sus días a examinar las fábricas y arsenales, y sus noches a redactar instrucciones para la dirección de los trabajos. Su memoria sobre el *Arte de fabricar* cañones ha venido a ser el manual de todas las fábricas.

Monge no carecía de enemigos a medida que la Revolución continuaba su obra. Un día la mujer de Monje oyó decir que Berthollet y su marido iban a ser denunciados. Con gran temor marchó a las Tullerías para saber la verdad. Encontró a Berthollet tranquilamente sentado bajo los castaños. Si, había oído ese rumor, pero creía que nada sucedería durante una semana. "Luego, añadió con su habitual tranquilidad, seguramente seremos detenidos, condenados y ejecutados".

Cuando Monge volvió al hogar aquella tarde su mujer le informó de la predicción de Berthollet. "¡Mi palabra! exclamó Monge, nada sé de todo esto. Lo que yo sé es que mi fábrica de cañones marcha maravillosamente".

Poco después, el ciudadano Monge fue denunciado por el portero de su alojamiento. Esto era demasiado también para Monge. Prudentemente abandonó París hasta que la tormenta pasara.

La tercera fase de la carrera de Monge se abrió en 1796, con una carta de Napoleón. Los dos se habían conocido en 1792, pero Monge no lo recordaba. Ahora Monge tenía 50 años, Napoleón 23 menos.
"Permitidme, escribía Napoleón, que os dé las gracias por el cordial acogimiento que un joven oficial de artillería recibió del Ministro de Marina en 1792. Él ha conservado preciosamente su recuerdo.
Este oficial es al presente general del Ejército [de Invasión de Italia], y se siente feliz al tenderle su mano reconocida y amistosa".
Así comenzó la larga intimidad entre Monge y Napoleón Comentando esta singular alianza, Arago[1] recuerda las palabras de Napoleón: "Monge me amaba como se ama a una amante'". Por lo demás, Monge parece haber sido el único hombre para quien Napoleón fue siempre un amigo leal y abnegado. Napoleón sabía que Monge había hecho posible su carrera, pero no era ésa la raíz de su afecto para él. El "reconocimiento" mencionado en la carta de Napoleón fue el nombramiento de Monge y Berthollet, hecho por el Directorio, como comisionados en Italia para elegir las pinturas, esculturas, y, otras obras de arte "donadas" por los italianos (después de haber sido sangrados en blanco del dinero de que disponían) como parte de su contribución a los gastos de la campaña napoleónica. Haciendo la selección del saqueo Monge logró adquirir un conocimiento muy agudo del arte, llegando a ser un perito excelente.
Las consecuencias prácticas del saqueo no hay duda que le disgustaron, y cuando envió a París material suficiente para llenar seis veces la capacidad del Louvre, Monge aconsejó, moderación. "No es conveniente -dijo- al gobernar a un pueblo para su propio bien y para el de sus conquistadores, esquilmarlo completamente" Su consejo fue desoído, y la gallina continuó poniendo sus huevos de oro.
Después de la aventura italiana, Monge se unió a Napoleón en su castillo de Udine. Los dos se hicieron muy amigos, Napoleón al encontrar en la conversación de Monge una fuente inagotable de información, y Monge, gozando del genial carácter, del Comandante en jefe.
En los banquetes públicos, Napoleón ordenaba siempre a la banda que tocase la *Marsellesa*, "Monge es un entusiasta". En efecto, se desgañitaba cantando

“Allons enfants de la patri
Le jour de gloire est arrivél"

Será privilegio especial nuestro ver llegar el día de gloria en compañía de otro gran matemático napoleónico, Poncelet.
En diciembre de 1797 Monge hizo un segundo viaje a Italia, esta vez como miembro de la comisión para investigar el "gran crimen" del asesinato del General Duphot. El general había sido muerto a balazos en Roma, mientras se hallaba cerca de Luciano Bonaparte. La comisión (como ya anticipó uno de los compañeros de armas del general muerto) recomendó una república modelada sobre la francesa para los levantiscos italianos. "Todo debe tener un fin, hasta los derechos de la conquista", como dijo uno de los negociadores al plantearse la cuestión de nuevas extorsiones.
Ocho meses más tarde pudo comprobarse la razón que tenía este astuto diplomático cuando los italianos se desembarazaron de su república ante el gran desconcierto de Napoleón, entonces en El Cairo, y en el mayor desconcierto de Monge y Fourier, que estaban con él.

[1] F. J. D. Arago, 1786 - 1853, astrónomo, físico y biógrafo científico

Monge fue uno de los pocos a quien Napoleón, en 1798, confió su plan para la invasión, conquista y civilización de Egipto. Como Fourier interviene en estos sucesos, debemos hacer un alto para dedicarnos a él.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier, nacido el 21 de marzo de 1768, en, Auxerre, Francia, era hijo de un sastre. Huérfano a los 8 años, fue recomendado al obispo de Auxerre por una caritativa dama que habla quedado cautivada por las buenas maneras y el grave comportamiento del muchacho, sin que pudiera soñar lo que su recomendado llegaría a ser. El obispo envió a Fourier al Colegio militar local regido por los benedictinos, donde el muchacho pronto demostró su talento. A la edad de 12 años escribía los magníficos sermones que pronunciaban, como si fueran propios, los altos signatarios eclesiásticos de París. A los 13 años era un niño-problema, voluntarioso, petulante y endemoniado. Por entonces, al tropezar con la Matemática, cambió como por arte de magia. Para procurarse luz que le permitiera dedicarse a sus estudios matemáticos mientras los demás dormían, recogía los cabos de velas existentes en la cocina y en otros lugares del colegio. De este modo sus estudios se desenvolvieron secretamente. Los buenos benedictinos pretendieron que el joven eligiera como profesión la carrera del sacerdocio, y entonces ingresó en la Abadía de San Benito para hacer el noviciado. Pero antes de que Fourier tomase sus votos llegó el año 1789. Siempre había deseado ser soldado, y si había elegido el sacerdocio ello era debido a que no desconocía el hecho de que los buenos cargos no eran concedidos a los hijos de los sastres. La Revolución le liberó. Sus viejos amigos de Auxerre eran suficientemente liberales para comprender que Fourier jamás sería sacerdote y le hicieron desistir de la carrera eclesiástica para nombrarle profesor de Matemática. Este fue el primer paso y no pequeño hacia su ambición. Fourier demostraba la vastedad de sus conocimientos reemplazando a sus colegas cuando estaban enfermos, y explicando, quizá mejor que ellos, toda clase de materias, desde la física hasta el griego y el latín.

En diciembre de 1789 Fourier (teniendo 21 años) marchó a París para presentar sus investigaciones sobre la solución de las ecuaciones numéricas, ante la Academia. Este trabajo, que va más allá de los estudios de Lagrange, tiene aún valor, pero como fue eclipsado por los métodos de Fourier en la física matemática, no nos detendremos en esa obra que, por otra parte, puede encontrarse en los textos elementales :sobre la teoría de ecuaciones.

Al volver a Auxerre, Fourier se unió al partido del pueblo y usó su elocuencia natural, que le había permitido, cuando era muchachuelo, componer magníficos sermones, para incitar al pueblo a poner fin a los simples sermoneadores.

Desde el principio Fourier fue un entusiasta de la Revolución, hasta que la Revolución le desbordó. Durante el Terror, ignorando el peligro que corría, protestó contra la brutalidad innecesaria. De haber vivido actualmente, es muy posible que Fourier perteneciera a esas clases cultas que no se dan cuenta de que serán las primeras en ser barridas cuando la verdadera revolución comience. En lugar del generoso aliento a las ciencias que él había previsto, Fourier vio a los hombres de ciencia subir a las carretas o huir del país, y a la ciencia misma combatiendo por su vida ante la rápida marea ascendente de la barbarie.

Es mérito de Napoleón haber visto, desde el principio, con notable claridad, que la ignorancia no puede hacer otra cosa que destruir. Su propio remedio quizá no haya sido en definitiva, mucho mejor, pero no hay duda que reconoció que es posible algo semejante a una civilización' Para frenar el derramamiento de sangre, Napoleón ordenó o alentó la creación de escuelas, pero no había maestros. Todas las cabezas preparadas para una acción inmediata, hacía ya tiempo que habían sido segadas por la guillotina. Era imperativo preparar un nuevo cuerpo docente, y con este fin fue creada, en 1794, la

Escuela Normal. Como premio a sus trabajos en Auxerre, Fourier fue nombrado profesor de matemática.
Con este nombramiento comienza una nueva era en la enseñanza de la Matemática en Francia. Recordando las aburridas conferencias de los antiguos profesores, que se entregaban a recitar palabra por palabra la misma lección todos los años, la Convención llamó a los creadores de la Matemática para que realizaran la enseñanza,, y prohibió que las conferencias se encerraran dentro de una norma rígida. Las lecciones eran pronunciadas estando, el, profesor en pie (no sentado, semi dormido, detrás de una mesa), y se establecía un libre intercambio entre el profesor y, sus discípulos en una serie de pregunta y explicaciones. Era deber del profesor evitar que la lección degenerara en un debate sin provecho.
Los resultados de este plan superaron todas las esperanzas y dieron lugar a uno de los períodos más brillantes en la historia de la Matemática y de la ciencia francesa. Tanto en la Normal, de breve vida, como en la Politécnica, más duradera, Fourier demostró su genio para la enseñanza. En la Politécnica amenizaba, sus conferencias matemáticas, haciendo alusiones históricas (muchas de las cuales podía referir a sus fuentes), y hábilmente matizaba las abstracciones con aplicaciones interesantes.
Fourier preparaba ingenieros y matemáticos en la Politécnica cuando Napoleón, en 1798, decidió que formara parte de la Legión de la Cultura para civilizar Egipto ."Para ofrecer una mano amiga a los pueblos infelices, para libertarlos del yugo brutal, bajo el cual han gemido durante siglos, y finalmente dotarlos sin demora de todos los beneficios de la civilización europea". Por increíble que parezca estas palabras no son del Signor Mussolini, en 1935, para justificar la, invasión de Etiopía, sino de Arago, en 1833, para facilitar el asalto de Napoleón a Egipto. Será interesante recordar la forma como los incultos habitantes de Egipto recibieron "todos los beneficios de la civilización europea” que los señores Monge, Berthollet y Fourier se esforzaban en hacerles tragar, y cual fue el resultado que, obtuvieron estos tres mosqueteros de la cultura europea en su abnegada obra de misioneros.
La flota francesa compuesta de 500 barcos llegó, a Malta el 9 de junio de 1798 y tres días más tarde, capturó la plaza. Como un primer paso para civilizar el Oriente, Monge fundó 15 escuelas elementales y una escuela superior trazada siguiendo las líneas de la Politécnica. Una semana más tarde la flota seguía su camino, con Monge a bordo de la nave capitana de Napoleón, la *Orient*. Todas las mañanas Napoleón trazaba un programa de discusión, que se desenvolvía después de la cena. No hay necesidad de decir que Monge era el astro de estas discusiones. Entre los temas solemnemente debatidos figuraban la edad de la Tierra, la posibilidad del fin del mundo, por la acción del fuego o del agua y la cuestión no menos interesante de si están habitados los planetas. Este último tema hace pensar que hasta en un momento relativamente precoz de su carrera, las ambiciones de Napoleón superaban a las de Alejandro.
La flota llegó a Alejandría el 1 de julio de 1798. Monge fue uno de los primeros en bajar a tierra, y fue necesario la autoridad de Napoleón como Comandante en jefe para evitar que el entusiasta geómetra participara en el asalto de la ciudad. La Legión de la Cultura no debía ser aniquilada al primer choque antes de comenzar la obra de civilización. Por tanto, Napoleón envió a Monge y al resto de la comisión al Cairo, remontando el Nilo.
Mientras Monge y sus compañeros se mecían en su barco como Cleopatra y su corte, bajo los rayos del sol, Napoleón ,marchaba resueltamente siguiendo la orilla, civilizando a los habitantes incultos y escasamente armados. En. ese momento el intrépido general oyó el ruido de un terrible cañoneo que partía del río. Pensando en lo peor abandonó la batalla a la que estaba entregado en aquel momento, y

corrió a salvar a la Comisión. El bendito barco había quedado varado en un banco de arena, y allí estaba Monge al pie del cañón como un veterano. Napoleón llegó a tiempo para, rechazar a los atacantes y concedió a Monge una condecoración bien merecida por su notable bravura. Monge pudo, pues sentir el olor de la pólvora. Napoleón estaba tan gozoso por haber salvado a su amigo, que no se lamentaba que esa salvación le hubiera costado demorar la victoria decisiva.

Después de la victoria del 20 de julio de 1798, en la batalla de las Pirámides, el ejército triunfante penetró en el Cairo. Todo se desarrolló del modo preciso, como lo había soñado el gran idealista Napoleón, pero entonces ocurrió algo que parecía increíble. Los obtusos egipcios poco se cuidaban de los científicos manjares que en el banquete cultural les ofrecían los señores Monge, Fourier y Berthollet, en el Instituto Egipcio (fundado el 27 de agosto de 1798, como parodia del *Institut de France*), sino que se sentaban como momias, indiferentes a las prestidigitaciones científicas del gran químico, a las palabras entusiastas de Monge y a las disquisiciones históricas de Fourier sobre las glorias de su propia civilización momificada. Los sudorosos sabios tenían que hacer gala de sangre fría ante estas gentes, que parecían incapaces de saborear los ricos manjares que la erudición francesa les servía en vano para su alimentación espiritual. Una vez más los astutos nativos tan sólo aspiraban a recobrar su paz, esperando que la plaga de langosta fuera expulsada por los tormentosos vientos. Para mantener su orgullo hasta que se desencadenara el vendaval, los salvajes egipcios criticaban la civilización superior de sus conquistadores en el único lenguaje que podrían comprender. Trescientos de los más bravos soldados de Napoleón encontraron la muerte en las reyertas callejeras. Monge mismo salvó su propia vida y las de sus compañeros sitiados gracias a una exhibición de heroísmo que hubiera valido una medalla a cualquier *Boy Scout* actual, en un país de habla inglesa.

Esta ingratitud por parte de los descarriados egipcios sorprendió a Napoleón. Empezó a sospechar que su deber moral era abandonar a sus compañeros de armas y su sospecha se vio fortalecida por las noticias alarmantes llegadas desde París. Durante su ausencia, los sucesos en el continente se habían agravado y ahora era preciso volver apresuradamente para conservar el honor de Francia y la propia piel. Monge gozaba de la confianza del general, pero Fourier, menos apreciado, nada sabía. A Fourier, sin embargo, le cupo la satisfacción de suponer que debía valer mucho ante los ojos de su comandante, pues se le dejó en El Cairo para educar a los egipcios cuando Napoleón, acompañado por el complaciente Monge, se embarcó secretamente para Francia sin despedirse de las tropas, de esas tropas que por él habían sufrido en el desierto los tormentos del infierno. Como no era Comandante en jefe, Fourier no tenía el derecho a poner los pies en polvorosa frente al peligro. Permaneció en Egipto forzadamente, y cuando los franceses reconocieron que debían ser los británicos y no ellos los que regeneraran a los egipcios, el devoto pero desilusionado Fourier volvió a Francia.

El regreso de Monge y Napoleón fue menos agradable para ambos que el viaje de ida. En lugar de especular acerca del fin del mundo, Napoleón dirigía sus pensamientos más ansiosos sobre su probable fin si encontraba algún navío británico. La pena por desertar del campo de batalla según podía recordar, era encontrarse ante el pelotón de fusilamiento. ¿Le tratarían los británicos como desertor por haber abandonado su ejército? Si debía morir, moriría de modo teatral.

"Monge, dijo un día, si somos atacados por los británicos, nuestro barco debe ser volado en el instante en que nos aborden. Le encargo realizar esa labor".

Al día siguiente un barco apareció en el horizonte y todos los hombres se dirigieron a sus puestos para repeler el esperado ataque. Por fortuna resultó ser un barco francés.

"¿Dónde está Monge?" preguntó alguno cuando la excitación había pasado.

Le encontraron en la Santa Bárbara con una lámpara encendida en la mano.
Berthollet y Monge llegaron a Francia tan andrajosos que parecían dos vagabundos. No habían podido cambiar su vestimenta desde que habían iniciado el viaje, y sólo con dificultad Monge fue reconocido por su mujer.
La amistad con Napoleón continuó invariable. Probablemente Monge fue el único hombre en Francia que osó decir a Napoleón las verdades en los días de su máxima arrogancia. Cuando Napoleón se coronó Emperador, los jóvenes de la Politécnica protestaron. Constituían el orgullo de Monge.
"Bien, Monge, Napoleón hizo notar un día, sus discípulos se han levantado contra mí, declarándose decididamente enemigos míos".
"Señor, replicó Monge, nos :hemos esforzado mucho para hacerles republicanos. Dadles algún tiempo para que se hagan imperialistas. De todos modos permitidme decir que habéis hecho un cambio demasiado rápido".
Poco importó esto para la amistad de los dos hombres. En 1804, Napoleón demostró su aprecio por los méritos de Monge nombrándole, conde de Péluse. Por su parte, Monge aceptó satisfecho el honor y vistió su título a la usanza de la nobleza, olvidando que una vez votó por la abolición de todos los títulos.
Y en pleno esplendor llegamos al año 1812, en el que se esperaba alcanzar el día de la gloria, en su lugar ese año trajo la retirada de Moscú. Demasiado viejo (tenía 66 años) para acompañar a Napoleón a Rusia,. Monge permaneció en Francia, siguiendo ansioso los progresos del Gran Ejército a través de los boletines oficiales. Cuando leyó el fatal "Boletín 29" anunciando el desastre de los ejércitos franceses, Monge sufrió un ataque de apoplejía. Al recobrar el conocimiento dijo: "Hace un momento no sabía algo que ahora sé; sé como moriré".
Monge gozó de los favores hasta el momento final, Fourier fue mantenido en un plano inferior. A su vuelta de Egipto, Fourier fue nombrado, (2 de enero de 1802) prefecto del Departamento de Isère, con el cuartel general en Grenoble. El distrito se hallaba políticamente alterado, la primera tarea de Fourier debía, ser restablecer el orden. Encontró una furiosa oposición que venció de una manera muy notable.
Mientras estuvo en Egipto, Fourier había tomado parte activa en la dirección de las investigaciones arqueológicas del Instituto. Los buenos ciudadanos de Grenoble quedaron conmovidos por la importancia que para la religión tenían algunos de los descubrimientos del Instituto; en efecto, la gran antigüedad atribuida a los más antiguos monumentos estaba en conflicto con la cronología de la Biblia. Sin embargo, quedaron muy satisfechos y se encariñaron con Fourier cuando, como consecuencia de nuevas investigaciones arqueológicas en las regiones vecinas, desenterró un santo de su propia familia, el bendito Pierre Fourier, su tío abuelo, que fue santificado por haber fundado una orden religiosa. Al haber restablecido su autoridad, Fourier pudo cumplir una obra amplia y útil: drenó las marismas, extirpó el paludismo y puede decirse que sacó a su distrito de las tinieblas medievales en que se encontraba.
Estando en Grenoble, Fourier compuso la inmortal *Theoria analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor) que constituye un jalón en la física matemática. Su primera memoria sobre la conducción del calor fue redactada en 1807. Ofrecía tantas perspectivas que la Academia alentó a Fourier para que la continuase, acordando que la teoría matemática del calor fuese el problema para el Gran Premio en 1812. Fourier ganó el premio, no sin que fuera objeto de críticas que le molestaron profundamente, pero que fueron bien toleradas.
Laplace, Lagrange y Legendre fueron los árbitros. Aunque admitían la novedad e importancia de la obra de Fourier, señalaron que el tratamiento matemático era falso y que dejaba mucho que desear en cuanto

a su rigor. Lagrange mismo descubrió casos especiales del teorema principal de Fourier, pero desistió de continuar ante las dificultades que preveía. Estas dificultades eran de tal naturaleza que probablemente hubiera sido imposible su eliminación en aquella época. Ha tenido que transcurrir más de un siglo antes de que pudieran ser resueltas satisfactoriamente.

Es interesante observar, de pasada, que esta disputa es un ejemplo típico de la diferencia radical entre los matemáticos puros y los físicos matemáticos. La única arma de que disponen los matemáticos puros es la demostración neta y rígida, y a no ser que el teorema aceptado pueda responder a las más grandes críticas de que su época es capaz, los matemáticos puros poco uso harán de él.

El matemático "aplicado" y el físico matemático, por otra parte, rara vez son tan optimistas que se imaginen que la complejidad infinita del Universo físico puede explicarse completamente por una teoría matemática suficientemente sencilla para ser comprendida por los seres humanos. Tampoco lamentan mucho que la concepción bella (o absurda) de Airy del Universo, cómo una especie de sistema de ecuaciones diferenciales interminable que se resuelve por si mismo, haya resultado una ilusión originada por el fanatismo matemático y el determinismo newtoniano; tienen alguna cosa más real a que recurrir, el Universo físico por sí mismo. Pueden experimentar y comprobar las deducciones de su matemática imperfecta frente al veredicto de la experiencia, lo cual, por la naturaleza de la Matemática, es imposible para un matemático puro. Si sus predicciones matemáticas no son confirmadas por la experimentación, no vuelve la espalda, como un matemático hace, a las pruebas físicas, sino que arroja su herramienta matemática y busca otra mejor.

Esta indiferencia de los hombres de ciencia por la Matemática por sí misma es tan irritante para un tipo de matemático puro como la omisión de una dudosa tilde es para otro tipo de pedantes. La consecuencia es que pocos son los matemáticos puros que han hecho alguna contribución significativa para la ciencia, aparte, como es natural, de inventar muchas de las herramientas que los hombres de ciencia encuentran útiles, (quizá indispensables). Y lo curioso es que los verdaderos puristas que objetan las proezas imaginativas audaces de los hombres de ciencia son los que más insisten en que su matemática, contrariamente a la difundida creencia, no es en modo alguno una cuestión de exactitud meticulosa, sino tan imaginativa y creadora, y algunas veces tan libre de cadenas, como puede serlo la poesía o la música. En ocasiones, los físicos combaten a los matemáticos con sus propias armas. Así, ignorando la evidente falta de rigor de la teoría analítica del calor de Fourier, Lord Kelvin la calificó como "un gran poema matemático".

Como ya ha sido dicho, los principales progresos de Fourier tuvieron lugar en la dirección de los problemas de valor-límite (explicado en el capítulo sobre Newton), el ajuste de las soluciones de ecuaciones diferenciales para prescribir las condiciones iniciales, probablemente el problema central de la física matemática. Desde que Fourier aplicó este método a la teoría matemática de la conducción del calor, numerosos hombres de talento han ido, durante un siglo, más allá de lo que el propio autor podría haber soñado, pero el paso dado por él fue decisivo. Una o dos de las cosas que resolvió son suficientemente sencillas para poderlas explicar en este lugar.

En Álgebra aprendemos a trazar las gráficas de ecuaciones algebraicas sencillas, y pronto observamos que las curvas trazadas, si se continúan suficientemente, no se interrumpen repentinamente y terminan. ¿Qué clase de ecuación resultaría de una gráfica formada por un segmento de recta (longitud finita, terminada en ambos extremos) repetida infinitamente como en la figura?

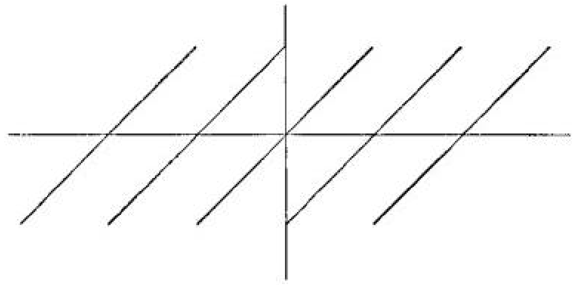


Figura 1

Tales gráficas, formadas por partes desunidas, de líneas rectas o curvas, aparecen frecuentemente en física, por ejemplo en las teorías del calor, del sonido y del movimiento de los fluidos. Puede demostrarse que es imposible representarlas por expresiones matemáticas finitas, cerradas; una infinidad de términos se presentan en sus ecuaciones. El teorema de Fourier proporciona un medio para representar e investigar tales gráficas matemáticamente: expresa (dentro de ciertas limitaciones) una función continua dada dentro de un cierto intervalo, o con sólo un número finito de discontinuidades en el intervalo, y teniendo en el intervalo sólo un número finito de puntos de discontinuidad como una infinita suma de senos o cosenos o de ambos. (Esto es sólo una tosca descripción).

Habiendo mencionado las funciones de los senos y los cosenos, recordaremos su propiedad más importante, la periodicidad. Supongamos que el radio de la circunferencia en la figura sea la unidad de longitud. Trazamos desde el centro *O* ejes rectangulares como en la Geometría cartesiana, haciendo que *AB* sea igual a 2π unidades de longitud. Así, *AB* es igual en longitud a la circunferencia (puesto que el radio es l). Supongamos que el punto *P* parte de *A* y describe la circunferencia en el sentido de la flecha: Trazamos *PN* perpendicular a *OA*.

Entonces, para cualquier posición de *P*, la longitud de *NP* se llama el *seno* del ángulo *AOP*, y *ON* el *coseno* del mismo ángulo. *NP y ON* tienen sus signos como en la Geometría cartesiano (*NP* es positivo por encima de *OA*, negativo por debajo; *ON* es positivo a la derecha de *OC*, negativo a su izquierda).

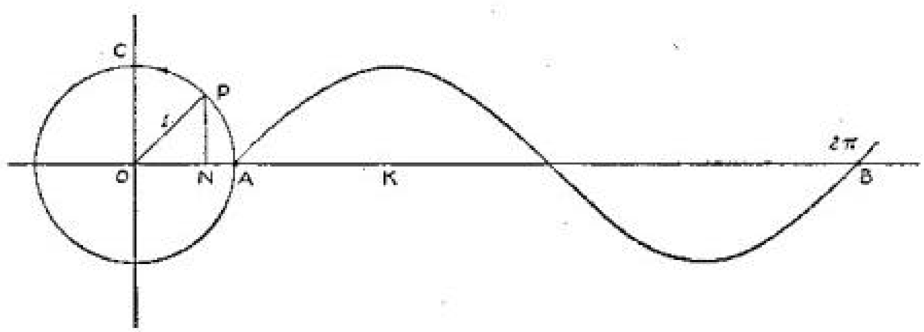


Figura 2

Para cualquier posición de *P*, el ángulo *AOP* será la misma fracción de cuatro ángulos rectos (360°) como el arco *A P* es de toda la circunferencia. Por tanto podemos medir estos ángulos *AOP* marcando a lo largo de *AB* las fracciones de 2*n* que corresponden a los arcos *AP*. Así cuando *P* está en *C*, ha sido recorrido 3/4 de la circunferencia completa; de aquí que al ángulo *AOC* corresponda el punto *K* a 1/4 de *AB* desde *A*.

En cada uno de los puntos de *AB* trazamos una perpendicular igual en longitud al seno del ángulo correspondiente, por encima o por .debajo de *AB* según que el seno sea positivo o negativo. Los extremos de estos segmentos perpendiculares que no estén sobre *AB* determinan una curva continua, la curva del seno. Cuando *P* vuelve, a *A* y comienza a recorrer de nuevo la circunferencia, la curva se repite más allá de *B* y así indefinidamente. Si *P* se mueve en, sentido opuesto, la curva queda a la izquierda. Después de un intervalo de 3π la curva se repite; el seno de un ángulo (aquí *AOP*) es una función *periódica,* siendo el *período* 2π. Para la palabra "seno" se emplea la abreviatura sen; y si x es un cierto ángulo, la ecuación

$$\operatorname{sen}(x + 2p) = \operatorname{sen} x$$

expresa el hecho de que sen x es una función de x, que tiene el período 2π.
Se ve fácilmente que si toda la curva de la figura se desplaza a la izquierda una distancia igual a *AK*, representará gráficamente el coseno de *AOP* y, como antes, es

$$\cos(x + 2p) = \cos x$$

El examen de la figura muestra que sen $2x$ cumple el periodo completo con "doble rapidez" que sen x, y de aquí que la gráfica para un período completo tendrá la mitad de la longitud que cuando se trata de seno x. Análogamente, sen $3x$ requerirá sólo $2\pi/3$ para su período completo, y así sucesivamente. Lo mismo puede decirse para cos x, *cos* $2x$, cos $3x$....
El principal resultado matemático de Fourier se puede explicar ahora en breves líneas. Dentro de las limitaciones ya mencionadas en relación con las gráficas "interrumpidas", cualquier función que tenga una gráfica bien terminada puede ser representada por una ecuación del tipo

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots \\ &+ \ldots + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots \end{aligned}$$

donde los puntos indican que las dos series continúan indefinidamente según la regla mencionada, y los coeficientes a_0, a_1, a_2 …, b_1, b_2 … son determinables, cuando una función dada *y* de x, es conocida. En otras palabras, una función dada de x, es decir *f(x),* se puede desarrollar en. una serie del tipo antes mencionado, una serie *trigonométrica* o de Fourier. Repetiremos que todo esto es exacto tan sólo con ciertas restricciones, que por fortuna no son de mucha importancia en la física matemática. Las excepciones son casos que tienen escasa o nula significación física. Una vez más Fourier fue el primero que abordó el problema de valor-límite. Los ejemplos de tales problemas mencionados en el capítulo sobre Newton, se resuelven por el método de Fourier. En cualquier problema es preciso encontrar los coeficientes a_0, a_1, a_2 …, b_0, b_1, b_2 … en una forma adaptable al cálculo. El análisis de Fourier permite esto.
El concepto de periodicidad (periodicidad simple) descrito antes es de evidente importancia para los fenómenos naturales: las mareas, las fases de la Luna, las estaciones, y otros muchos fenómenos familiares, son de carácter periódico. Algunas veces un fenómeno periódico, por ejemplo la periodicidad de las manchas del Sol, puede ser estudiado por la superposición de cierto número de

gráficas de periodicidad simple. El estudio de esas situaciones puede entonces ser simplificarte, analizando los fenómenos periódicos individuales, de los cuales el original es el resultante.
El proceso es matemáticamente el mismo que el análisis de un sonido musical en sus armónicas fundamental y sucesivas. Para una primera grosera aproximación a la "cualidad del sonido" sólo se considera, la fundamental; la superposición de sólo algunas armónicas bastan de ordinario para producir un sonido que no se distingue del ideal (en el cual hay una infinidad de armónicas). Lo mismo puede decirse para el fenómeno abordado por el análisis "armónico" o de "Fourier". Se han hecho algunos ensayos para descubrir largos períodos (los fundamentales) en la repetición de los terremotos y de las precipitaciones de lluvias anuales. El concepto de periodicidad simple es tan importante en la Matemática pura como en la aplicada, y veremos que es generalizable a la periodicidad múltiple (en relación con las funciones elípticas y otras, etc.), que a su vez actúan sobre la Matemática aplicada.
Perfectamente consciente de que había realizado algo de una gran importancia, Fourier no prestó atención a las críticas. Ellos tendrían razón, él estaría equivocado, pero había hecho lo suficiente para tener derecho a independizarse.
Cuando la obra comenzada en 1807 fue completada y reunida en el tratado sobre la conducción de calor en 1822, pudo verse que el obstinado Fourier no había cambiado una sola palabra de su exposición original, obedeciendo a la segunda parte del consejo que da Francis Galton a todos los autores: "No ofenderse jamás por la crítica, y nunca contestarla". El resentimiento de Fourier fue racionalizado en ataques a la Matemática pura, atendiendo a lo que le interesaba y sin incurrir en confusiones en la física matemática.
Todo marchaba bien en Francia y la obra de Fourier iba desenvolviéndose cuando Napoleón, habiendo escapado de la isla de Elba, desembarcó en la costa francesa el 10 de marzo de 1815. Nuevos dolores de cabeza esperaban a los veteranos. Fourier estaba en Grenoble en aquella época, y temiendo que el populacho volviera a caer en la borrachera al dar la bienvenida a Napoleón, se apresuró a marchar a Lyon para informar a los Borbones de lo que sucedía. Estos, con su normal estupidez, se negaron a creerle. Al regresar Fourier supo que Grenoble había capitulado. El matemático fue tomado prisionero y llevado ante Napoleón en Bourgoin. Se enfrentó con su antiguo comandante, que había conocido muy bien en Egipto y del cual había aprendido a desconfiar con su cabeza aunque no con su corazón.
Napoleón se inclinaba. sobre el mapa, con un compás en la mano. Le miró.
"Bien, Señor Prefecto ¿me habéis declarado la guerra?"
"Señor - balbuceó Fourier, mis juramentos constituyen un deber".
"¿Un deber decís? ¿No veis que nadie en el país participa de vuestra opinión? No os imaginaréis que vuestro plan de campaña me atemoriza. Tan sólo sufro al ver entre mis adversarios a un *egipcio,* que ha comido a mi lado el pan del vivac, un viejo amigo. ¿Cómo, señor Fourier, habéis podido olvidar que me debéis lo que sois?"
Lo que Fourier recordaba era que Napoleón le había abandonado en Egipto, aunque no se atreviera a expresarle en bien de la seguridad de su cabeza.
Algunos días más tarde Napoleón preguntó a Fourier, que nuevamente le era leal:
"¿Qué pensáis de mi plan?"
"Señor, creo que fracasaréis. Encontraréis un fanático en vuestro camino, y todo marchará mal".
"¡Bah! Nadie está en favor de los Borbones, ni siquiera los fanáticos. Habréis leído que me han colocado fuera de la ley. Yo seré más indulgente, me contentaré con expulsarles de las Tullerías".

La segunda restauración encontró a Fourier en París haciendo toda clase de esfuerzo para poder vivir. Pero antes de que muriera de hambre, los antiguos amigos se apiadaron de él y lo nombraron director de la Oficina de Estadística en el Sena. La Academia intentó elegirle miembro en 1816, pero los Borbones ordenaron que ningún amigo de su antiguo perseguido pudiera recibir honores. Sin embargo, la Academia eligió a Fourier al año siguiente. Esta acción de los Borbones contra Fourier podrá parecer mezquina, pero al lado de lo que hicieron con el pobre anciano Monge fue principesca. *¡Noblesse obliga!*

Los últimos años de Fourier se evaporaron en nubes de charla. Como secretario permanente de la Academia siempre le era posible encontrar oyentes y se transformó en un sujeto insufrible. En lugar de continuar su obra científica entretenía a su auditorio con promesas jactanciosas acerca de lo que iba a hacer. Sin embargo, ya había hecho mucho por el progreso de la ciencia, y si algún ser humano merece la inmortalidad, Fourier es uno de ellos. No tenía necesidad de sus jactancias finales.

La permanencia de Fourier en Egipto fue causa de una curiosa costumbre que aceleró su muerte. Creía que el calor del desierto era la condición ideal para la salud. Además de fajarse como si fuera una momia, vivía en habitaciones que, según decían sus amigos eran más cálidas que el infierno y el desierto del Sahara combinados. Murió de una enfermedad al corazón (algunos dicen que un aneurisma) el 16 de mayo de 1830, a los 63 años. Fourier pertenecen esa selecta serie de matemáticos cuya obra es tan fundamental que sus nombres van siempre acompañados de adjetivos en todas las lenguas civilizadas.

La declinación de Monge fue más lenta y más cruel. Después de la primera restauración, Napoleón se sentía amargado y rencoroso al contemplar cómo su poder se desvanecía. Al volver al trono, Napoleón sintió el. deseo de descargar su fusta sobre las cabezas de los ingratos, pero Monge, plebeyo bueno y anciano, como era, le aconsejó clemencia y sentido común: Napoleón podía encontrarse algún día con la espalda contra la pared, y quizá se vería obligado a, recurrir al apoyo de los ingratos. Prudentemente, Napoleón atemperó la injusticia con la paciencia, y ello se debió sin duda a Monge,

Después de que Napoleón huyó de Waterloo, dejando que sus tropas se las arreglaran como mejor pudieran, volvió a París, La devoción de Fourier se enfrió y la de Monge persistió.

Se cuenta como último sueño de Napoleón su pretensión de conquistar América. Según Monge sus móviles serían, más elevados, increíblemente más elevados. Rodeado de enemigos y ante el triste pensamiento de verse forzado a abandonar sus empresas en Europa, Napoleón dirigió sus ojos de águila hacia Occidente, y con su mirada recorrió América, desde Alaska al cabo de Hornos. El demonio harto de carne se vuelve fraile, y Napoleón pensó en recurrir a las ciencias, en su nuevo camino. Sería un segundo Alejandro Humboldt pero infinitamente más grande, declaraba ambiciosamente.

"Deseo, confesaba a Monge, hacer en esta nueva carrera obras y descubrimientos dignos de mí".

¿Cuáles serían las obras dignas de un Napoleón?

El águila caída completaba su sueño.

"Necesito un compañero -admitía- para hacer progresar el estado presente de las ciencias. Atravesaremos todo el Continente desde Canadá a cabo de Hornos, y en este inmenso viaje estudiaremos todos esos prodigiosos fenómenos de la física terrestre sobre los cuales el mundo científico no ha pronunciado su veredicto". ¿Paranoia?

"Señor, exclamó Monge, quien por entonces tenía 67 años, ya he encontrado a vuestro colaborador. Os acompañaré".

Napoleón descartó cortésmente el pensamiento del voluntario veterano, que dificultaría su luminosa marcha desde la bahía Baffin hasta la Patagonia.

"Sois demasiado viejo, Monge. Necesito un hombre más joven".

Monge se dedicó a encontrar "un hombre más joven". Pensó en el vehemente Arago como compañero ideal para los viajes de su enérgico señor. Pero Arago, a pesar de toda su elocuente retórica sobre lo gloriosa que es la gloria, aprendió su lección. Un general que abandona sus tropas, como Napoleón había hecho en Waterloo, no era el conductor que pudiera ser seguido, ni siquiera en la rica América. Nuevas negociaciones fueron bruscamente detenidas por los británicos. A mediados de octubre Napoleón exploraba Santa Elena. El tesoro que había reunido para la conquista de América encontró bolsillos algo más profundos que los de los hombres de ciencia, y no surgió un Instituto Americano en las orillas del Mississipí o del Amazonas que recordara su fantástica excursión al Nilo.

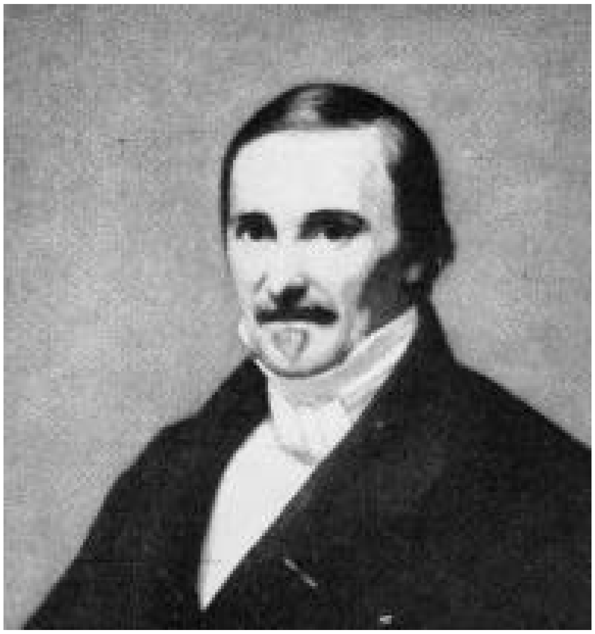
Habiendo gozado del pan del imperialismo, Monge ahora gustaba la sal. Sus antecedentes como revolucionario y favorito del presuntuoso corso, dieron lugar a que su cabeza fuera apetecida por los Borbones, y Monge hubo de marchar de un rincón a otro para poder conservar la vida. La ruindad humana se manifiesta en el tratamiento acordado a Monge por los santificados Borbones, que despojaron al anciano de su último honor, que en modo alguno se debía a la generosidad de Napoleón. En 1816 los Borbones ordenaron que Monge fuera expulsado de la Academia. Los académicos, temerosos como conejos, obedecieron.

La ruindad de los Borbones llegó hasta un increíble extremo el día de la muerte de Monge. Como era de prever, su muerte tuvo lugar en un prolongado estupor después de un ataque. Los jóvenes de la Politécnica, a quienes Monge protegió de la interferencia dominante de Napoleón, eran el orgullo del anciano, que, a su vez, constituía el ídolo de los jóvenes. Cuando Monge murió el 28 de julio de 1818, los alumnos de la Politécnica pidieron el permiso para asistir al sepelio. El rey lo negó.

Bien disciplinados, los jóvenes estudiantes obedecieron la orden, pero tenían más recursos o más valor que los tímidos académicos. La orden del rey se refería sólo al entierro. Al día siguiente, reunido el claustro de la Politécnica, acudió al cementerio para depositar una corona sobre la tumba de su maestro y amigo Gaspard Monge.

Capítulo Decimotercero
EL DIA DE GLORIA

PONCELET



La Geometría proyectiva nos ha abierto fácilmente nuevos territorios en nuestra ciencia, y ha sido justamente considerada como una carretera real para su campo particular de conocimiento

Felix Klein

.

Más de una vez, durante la primera Gran Guerra, cuando las tropas francesas eran atacadas y no existía la posibilidad de reforzarlas, el alto mando pudo salvar la situación enviando a toda prisa hacia el frente a alguna gran artista, envuelta desde el cuello hasta los pies en la tricolor, para que cantara la *Marsellesa* ante los hombres agotados. Cumplido su papel, la artista volvía a París en su automóvil; las tropas fortalecidas avanzaban, y a la mañana siguiente, la prensa, cínicamente censurada, aseguraba al lector que "el día ' de la gloria ha llegado".

En 1812, el día de gloria estaba aún por venir. Las grandes artistas no acompañaban al medio millón de soldados de Napoleón Bonaparte en su marcha ' triunfal por el corazón de Rusia. Eran los hombres los que cantaban a medida que los rusos se retiraban ante el invencible ejército, y en las infinitas llanuras resonaba el vigoroso canto que había derrumbado a los tiranos de sus tronos y elevado a Napoleón al lugar que ocupaba.

Todo marchaba a pedir de boca y lo mejor que podía imaginar el más entusiasta de aquellos hombres: seis días antes de que Napoleón cruzara el Niemen, su brillante estrategia diplomática exasperó indirectamente al presidente Madison, lanzando a los Estados Unidos, a una guerra contra Inglaterra. Los rusos se retiraban hacia Moscú con la mayor rapidez, y el Gran Ejército tenía que acelerar su marcha para acercarse al enemigo que huía. En Borodino los rusos se detuvieron, combatieron y se retiraron. Napoleón continuó sin oposición, salvo la del terrible clima, hasta Moscú, donde notificó al Zar su voluntad de que las fuerzas rusas debían rendirse incondicionalmente. Los habitantes de Moscú, dirigidos por su gobierno, prendieron fuego a la ciudad, quemaron hasta la tierra, y Napoleón no encontró otra cosa que vacío y humo.

Rencoroso, pero aun dueño de la situación, Napoleón no se cuidó del antiguo proverbio, que por segunda o tercera vez se le atravesó en su carrera militar, "Quien a hierro mata a hierro muere".

Ordenó el retorno por las ahora heladas planicies, para preparar su encuentro con Blücher en Leipzig, dejando al Gran Ejército en la disyuntiva de retirarse o de morir de frío.

Con el ejército francés abandonado se hallaba un joven oficial de ingenieros, Jean-Victor Poncelet (10 de julio 1788, 23 de diciembre 1867) que, como estudiante de la Escuela Politécnica de París y más tarde en la Academia Militar de Metz, se había inspirado en la nueva Geometría descriptiva de Monge (1746-1818) y en la *Géométrie de la position* (publicada en 1803) del anciano Carnot (Lazare-Nicolas Marguerite Carnot, 13 de mayo, 1753, 2 de agosto, 1823), cuyo programa revolucionario aunque algo reaccionario había sido ideado para "libertar la Geometría de los jeroglíficos del Análisis”.

En el prefacio de su clásica obra *Applications d'analyse el de géomé*trie (segunda edición, 1862, de la obra primeramente publicada en 1822), Poncelet refiere sus recuerdos de la desastrosa retirada de Moscú. El 18 de noviembre de 1812, el agotado resto del ejército francés, dirigido por el mariscal Ney, era vencido en Krasnoï. Entre los supuestos muertos abandonados en los helados campos de batalla se hallaba el joven Poncelet. Su uniforme de oficial de ingenieros le salvó la vida. Un destacamento de soldados, al descubrir que aún respiraba, le condujo ante el Estado Mayor ruso para interrogarlo.

Como prisionero de guerra, el joven oficial tuvo que marchar durante casi cinco meses a través de las llanuras heladas, destrozado su uniforme, y alimentándose con una escasa ración de pan negro. Víctima de un frío tan intenso que con frecuencia congelaba el mercurio del termómetro, muchos de los compañeros de Poncelet murieron en el camino, pero su extraordinario vigor le permitió llegar, en marzo de 1813, a la prisión de Saratoff, en las orillas del Volga. Al principio estaba demasiado agotado para pensar. Pero cuando "el espléndido sol de abril'", restableció su vitalidad, recordó que había recibido una buena educación matemática, y para suavizar los rigores de su exilio resolvió reproducir lo que pudiera de lo que había aprendido. Fue así como creó la Geometría proyectiva.

Sin libros y con escasos materiales para escribir, pudo ir recordando sus conocimientos y llevando lo que sabía de Matemática, desde la Aritmética a la Geometría superior y al Cálculo. Estos primeros trabajos, eran alentados por la actividad docente de Poncelet quien deseaba preparar a sus compañeros para los exámenes a que deberían someterse cuando volvieran a París. Se dice que al principio Poncelet tan sólo disponía de trozos de carbón recogidos en la pequeña estufa para trazar sus figuras en la pared de su celda. Poncelet hace la interesante observación de que prácticamente todos los detalles y complicados desarrollos de la Matemática se le habían borrado de la memoria, mientras los principios fundamentales y generales continuaban indelebles en su recuerdo. Lo mismo podía decirse de la física y de la mecánica.

En septiembre de 1814, Poncelet volvió a Francia acompañado del*: "material de siete libros de apuntaciones escritos en Saratoff en las prisiones de Rusia (1813 a 1814), en unión de otros diferentes escritos antiguos y nuevos"*, en los que el joven de 24 años había dado a la Geometría proyectiva su más fuerte impulso desde que Desargues y Pascal iniciaron la cuestión en el siglo XVII. La primera edición de su obra clásica fue publicada, como hemos dicho, en 1822. No comprendía la íntima "apología de su vida", utilizada después; pero iniciaba la tremenda oleada del siglo XIX hacia la Geometría proyectiva, la Geometría sintética moderna, y la interpretación geométrica, de los números "imaginarios" que se presentan en las manipulaciones algebraicas, dando a tales "imaginarios" interpretaciones geométricas como elementos "ideales" del espacio. Propone también el poderoso y (por un tiempo), discutido "principio de continuidad", que simplifica grandemente el estudio de las configuraciones geométricas, unificando propiedades al parecer inconexas de figuras para formar conjuntos uniformes y completos. Excepciones y, casos raros especiales aparecen en el amplio, punta de vista de Poncelet como aspectos simplemente diferentes de cosas ya familiares. El clásico tratado hace también uso del creador «principio de la dualidad" e introduce el método de “reciprocidad", ideado por el mismo Poncelet. Brevemente, todo un arsenal de nuevas armas fue añadido a la Geometría por el joven ingeniero militar que había sido abandonado, considerándolo muerto, en los campos de Krasnoï, y que seguramente hubiera muerto antes de llegar la mañana si su uniforme de oficial no hubiera despertado el deseo a quienes le recogieron de llevarle ante el Estado Mayor ruso para someterle a un interrogatorio.

Durante la siguiente década (1815-25) los deberes de Poncelet como ingeniero militar tan sólo le dejaron escasos momentos para su verdadera ambición, la aplicación de sus nuevos métodos en Geometría. El descanso tardó en venir muchos años. Su alto sentido del deber y su gran eficacia hicieron de Poncelet una fácil víctima de sus miopes superiores. Algunas de las tareas que realizó sólo pudieron ser hechas por un hombre de su calibre, por ejemplo la creación de la Escuela de mecánica práctica en Metz y la reforma de la educación matemática en la Politécnica. Pero los informes sobre fortificaciones, sus trabajos en el Comité de Defensa y la Presidencia de las secciones mecánicas en las exposiciones internacionales de Londres y París (1851-58), por sólo mencionar algunos de los trabajos de rutina, podrían haber sido realizados y desempeñados por otros hombres. Sus grandes méritos científicos no fueron, sin embargo, menospreciados. La Academia de Ciencia le eligió (1831) como sucesor de Laplace. Por razones políticas Poncelet declinó el honor hasta transcurridos tres años.

Toda la vida madura de Poncelet fue un largo conflicto interno entre una mitad de su personalidad nacida para los trabajos perdurables, y la otra mitad que aceptaba todos los cargos vulgares que los políticos de corta visión y los obtusos militaristas le encomendaban. Poncelet hubiera deseado escapar, pero un falso sentido del deber le obligó a seguir a los ejércitos napole6nicos. El hecho de que no sufriera un precoz y permanente derrumbe nervioso es un testimonio de su vigor físico. Y el hecho de que conservara su capacidad creadora hasta casi los días de su muerte, ocurrida a los 79 años, es una brillante prueba de su indiscutible genio. Este hombre, dotado de un talento excepcional tuvo que recorrer toda Francia para inspeccionar las hilanderías de algodón, de seda y de lino. No se necesitaba a Poncelet para hacer esta clase de trabajos, y él lo sabía. Pero hubiera sido el último hombre en Francia que objetase poner su talento único al servicio de tales cuestiones, pues no pertenecía ese tipo de sabios que piensan que la ciencia pierde su perenne virginidad cada vez que pone sus manos en la industria. Pero no era el hombre indispensable para esa labor, como posiblemente lo era Pasteur para cuestiones igualmente importantes de las enfermedades de la cerveza, de los gusanos, de la seda y de los seres humanos.

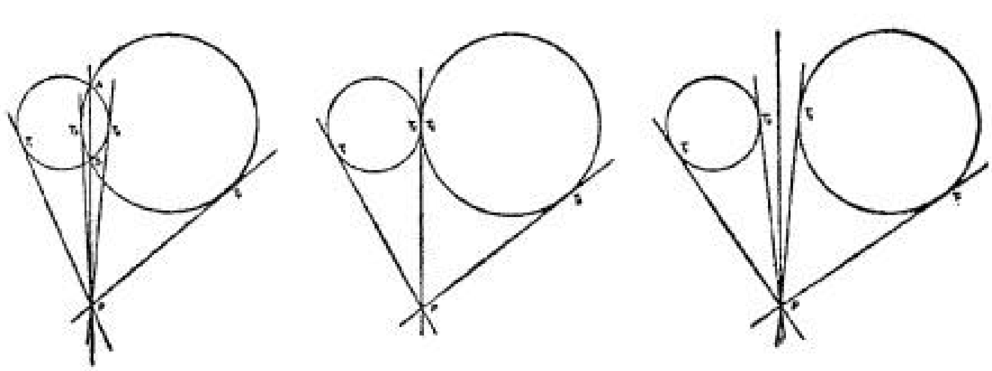


Figura 1

Dirijamos ahora nuestra mirada hacia una o dos de las armas ideadas o modificadas por Poncelet para la conquista de la Geometría proyectiva. En primer término se halla su "principio de la continuidad", que se refiere a la permanencia de las propiedades geométricas cuando una figura se transforma por proyección, o de otra manera en otra. No hay duda que es un principio más bien vago, pero la propia enunciación de Poncelet no fue jamás muy exacta, y en realidad le llevó a infinitas controversias con geómetras más conservadores, a los que cortésmente consideraba como viejos fósiles, empleando siempre las dignas palabras propias de un oficial y de un caballero. Con la salvedad de que el principio, aunque de gran valor heurístico, no siempre proporciona pruebas de los teoremas que sugiere, podemos penetrar en su espíritu valiéndonos de algunos ejemplos.

Imaginemos dos circunferencias secantes, y supongamos que se cortan en los puntos *A* y *B*. Únase *A* y *B* por una recta. La Figura 1 muestra la prueba ocular de dos puntos reales *A*, *B* y la cuerda común AB de las dos circunferencias. Ahora imaginemos que las dos circunferencias se apartan gradualmente. La cuerda común se convierte en una tangente común a las dos circunferencias en su punto de contacto. En cualquier posición el siguiente teorema (que de ordinario constituye un ejercicio de Geometría escolar) es cierto, si se toma un punto cualquiera P en la cuerda común, pueden dibujarse cuatro rectas tangentes desde él a las dos circunferencias, y si los puntos en que estas rectas tangentes tocan las circunferencias son T_1, T_2, T_3, T_4, los segmentos PT_1, PT_2, PT_3, PT_4 serán de igual longitud. Inversamente, si se pregunta dónde se encuentran todos los puntos *P* en que sean iguales los cuatro segmentos tangentes a los dos círculos, la respuesta será: *sobre la* cuerda común. Trasladando todo esto al lenguaje usual, diremos que el lugar geométrico de un punto *P* que se mueve de modo que las longitudes de los segmentos tangentes desde él a dos círculos que *se* cortan en iguales, es la cuerda común de los dos círculos[1]. Todo esto es familiar y comprensible; no hay un elemento de misterio ni de incomprensión, como algunos pueden decir que existe en el paso siguiente, donde interviene, el principio de continuidad".

Los círculos se han separado completamente. Los dos puntos en que se cortaban (o en el último momento su único punto de contacto) ya no son- visibles sobre el papel, y la "cuerda común" queda suspendida entre los dos círculos sin cortar visiblemente a ninguno de ellos. Pero es sabido que existe aún un lugar *geométrico* de segmentos tangentes iguales, y se demuestra fácilmente que este "lugar" es una recta perpendicular a la línea que une los centros de las dos circunferencias, lo mismo que era el “lugar” original (la cuerda común). Por decirlo de algún modo, si objetamos las "imaginarias", continuaremos diciendo que los dos círculos se cortan en dos puntos en la parte infinita del plano, hasta cuando se encuentran separados y decimos también que la, nueva línea recta, lugar geométrico, es aun la cuerda común de los círculos, los puntos en que se cortan son "imaginarios" o "ideales", pero la línea recta que los une (la nueva "cuerda común") es "real", realmente la podemos trazar sobre el papel.

Si escribimos, las ecuaciones de las circunferencias y rectas algebraicamente a la manera de Descartes, todo lo que hacemos en el Álgebra para resolver las ecuaciones de los círculos que se cortan, tiene su correlación unívoca en la Geometría ampliada, mientras que si antes no extendemos nuestra Geometría o al menos aumentamos su vocabulario, para tomar en cuenta los elementos "ideales" gran parte del pensamiento algebraico carece de significación geométrica.

[1] En lo que precede las tangentes son reales (visibles) si el punto *P* se halla fuera de los círculos, si el punto *P* está dentro, las tangentes son imaginarias.

Como es natural, todo esto requiere justificación lógica. Tal justificación ha sido dada hasta donde es necesaria, es decir hasta la fase que engloba las aplicaciones del "principio de continuidad" útiles en Geometría.

Un ejemplo más importante del principio lo proporcionan las rectas paralelas. Antes de explicar este ejemplo, podemos repetir la observación de un venerable y distinguido juez, mientras hablaba de estas cuestiones. Un matemático aficionado, pensando agradar al anciano compañero charlaba de algunas cosas referentes al concepto geométrico de infinito. En aquel momento paseaban por el jardín del juez. Al afirmar que "las rectas paralelas se encuentran en el infinito", el juez se detuvo. "Mr. Blank dijo con gran solemnidad. El hombre que diga que las rectas paralelas se encuentran en el infinito o en cualquier otra parte, no hay duda de que no posee sentido común". Para obviar el argumento podemos decir como antes, que se trata de una forma de hablar que deja a salvo excepciones irritantes, casos notablemente diferentes. Pero una vez que el lenguaje ha sido aceptado, la coherencia lógica exige que sea seguido hasta el fin, sin discutir las reglas de la gramática lógica, de la sintaxis, y esto es lo que se hace.

Para apreciar lo razonable que es este lenguaje imaginemos una línea referencia y un punto P que, no esté en l. Trácese, por P una recta l' que corte a l en P', e imaginemos que l' gira en torno a P, de modo que P' se aleja a lo largo de l. ¿Hasta cuando puede alejarse P'?, Decimos que se detiene cuando l, y l' llegan a ser paralelas, o si se prefiere cuando el punto en que se cortan P' está en el infinito. Por las razones ya indicadas, este lenguaje es conveniente y sugestivo no en un manicomio, como el juez parecería pensar, y tiene especial valor para cuestiones interesantes y algunas veces muy prácticas propias de la Geometría.

En una forma análoga, las partes finitas de líneas, planos y espacio tridimensional (también del espacio superior), visualizables se enriquecen por la adición de puntos, rectas, planos o "regiones ideales" en *el infinito.*

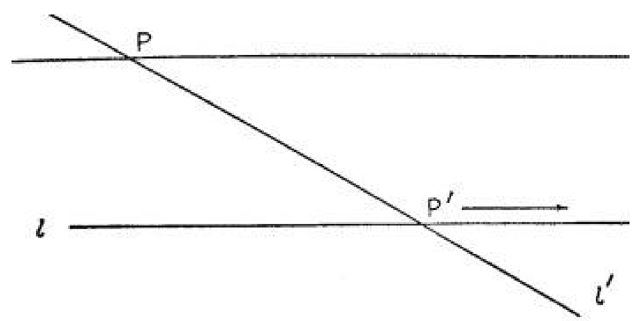


Figura 2.

Si el juez hubiera podido ver esto, habría sido capaz de comprender el siguiente notable ejemplo del comportamiento del infinito en Geometría: *dos círculos* cualesquiera en un plano *se* cortan en *cuatro puntos, dos de los cuales son imaginarios y se* hallan en el infinito. Si los círculos son concéntricos, se tocan en dos puntos que están en la recta del infinito. Además, *todos* los círculos en un plano pasan por *los* mismos dos puntos en el infinito, que se designan con las letras I y J, siendo llamados Isaac y Jacob por los estudiantes irreverentes.

En el capítulo sobre Pascal hemos dicho lo que significan en Geometría las propiedades proyectivas, frente a las propiedades métricas. En este lugar podernos recordar las observaciones de Hadamard sobre la Geometría analítica de Descartes. Hadamard observó, entre otras cosas, que la Geometría sintética moderna ha pagado la deuda de la Geometría en general al Álgebra sugiriendo importantes investigaciones en Álgebra y Análisis. Esta moderna Geometría sintética fue objeto de las investigaciones de Poncelet. Aunque todo esto quizá puede parecer embrollado, podemos seguir la cadena comenzando por el eslabón del año 1840, pues el problema es realmente importante no sólo para la historia de la Matemática pura, sino también para la de la reciente física matemática.

El eslabón del año 1840 es la creación debida a Boole, Cayley, Sylvester y otros autores de la teoría algebraica de invariantes, que (como explicaremos en un capítulo posterior) tiene importancia fundamental en la física teórica ordinaria. La Geometría proyectiva de Poncelet y su escuela desempeñó un papel importante en el desarrollo de la teoría de invariantes: los geómetras descubrieron todo un continente de propiedades de figuras invariantes en proyección; los algebristas del año 1840, especialmente Cayley, trasladaron las *operaciones de pro*yección geométricas al lenguaje analítico, aplicaron este traslado al modo cartesiano algebraico de expresar las relaciones geométricas, y pudieron así hacer progresos extraordinariamente rápidos en la elaboración de la teoría de invariantes algebraicos. Si Desargues, el osado precursor del siglo XVII, hubiera previsto adónde conducía su ingenioso método de proyección, habría quedado asombrado. Sabía que había hecho algo muy importante, pero probablemente no tenía el concepto de cuán grande era su importancia.

Isaac Newton tenía 20 años cuando Desargues murió. No se sabe si Newton oyó pronunciar el nombre de Desargues. Aunque lo oyera, seguramente no pudo darse cuenta de que el humilde eslabón forjado por su anciano contemporáneo formaría parte de la fuerte cadena que en el siglo XX iba a arrastrar su ley de la gravitación universal desde su pedestal, que se suponía inmortal. Sin la maquinaria matemática del cálculo tensorial, que naturalmente se desarrolló (como veremos) de la obra algebraica de Cayley y Sylvester, es poco probable que Einstein o cualquier otro hubieran sido capaces de conmover la teoría newtoniana de la gravitación.

Una de las ideas útiles de la geometría proyectiva es la de la *razón doble o razón armónica*. Trácense por un punto O cuatro líneas rectas l, m, n, p. Cortando estas cuatro líneas, trazar una línea recta x, y señalar los puntos en que corta a las otras rectas con las letras L, M, N, P respectivamente. Tendremos así sobre x los segmentos lineales LM, MN, LP, PN. Con ellos fórmense ahora las razones $LM : MN$ y $LP : PN$. Finalmente formemos la razón de estas dos razones o sea la razón *doble*

$$LM * PN : MN * LP$$

Lo más notable de esta razón doble es que tiene el mismo valor numérico para todas las posiciones de la línea x.

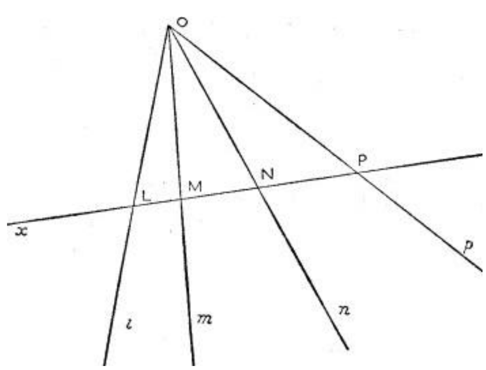


Figura 3

Más tarde nos referiremos a la unificación hecha por Félix Klein, de la Geometría euclidiana y las geometrías comunes no euclidianas, una pangeometría. Esta unificación fue posible gracias a la revisión de Cayley de los conceptos usuales de *distancia* y ángulo sobre los que se funda la Geometría métrica. En esta revisión, la razón doble desempeña la parte principal, y mediante ella, por la introducción de elementos "ideales" propuestos por él, Cayley redujo la Geometría métrica a una especie de Geometría proyectiva.

Para terminar la descripción completa de las armas que Poncelet utilizó, mencionaremos el "principio de dualidad", extraordinariamente fructífero. Para mayor simplicidad, tan sólo consideraremos como actúa el principio en Geometría plana.

Obsérvese desde el primer momento que cualquier curva continua, puede ser considerada en estas dos formas: engendrada por el movimiento de un punto o de una recta. Para darse cuenta de esto último imaginemos la recta tangente trazada en cada punto de la curva. Así *puntos y rectas* están íntima y recíprocamente asociados con respecto a la curva: por cualquier, punto de la curva pasa una recta de la curva; sobre cualquier recta de la curva hay un punto de la curva. En lugar de *pasar por* de la frase precedente, escríbase *estar* en. Entonces las dos afirmaciones son idénticas, salvo que las palabras "punto" y recta se intercambian.

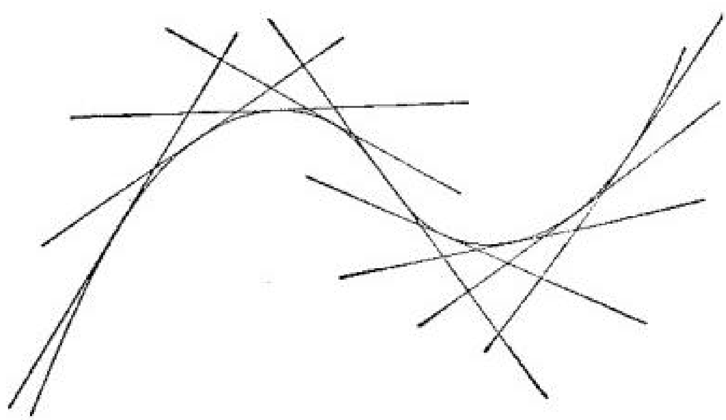


Figura 4

Para hacer universal esta correspondencia "añadamos" al plano usual en que la Geometría euclidiana tiene valor, *el plano métrico, los "elementos ideales"* del tipo ya descrito. El resultado de esta adición es el plano *proyectivo.* Un plano proyectivo está compuesto por todos los puntos y líneas rectas ordinarios de un plano métrico, y, además, por una serie de puntos ideales, todos los cuales, según se acepta, están sobre una línea ideal, de forma tal que cualquiera de esos puntos ideales está sobre cualquier línea ordinaria[2].

En el lenguaje euclidiano diríamos que las dos líneas paralelas tienen la misma dirección; en fraseología proyectiva esto se expresaría diciendo que "dos líneas paralelas tienen el mismo punto ideal". Además, en la antigua terminología si dos o más rectas tiene la misma dirección, son paralelas; en la nueva, si dos o más rectas tienen el mismo punto ideal, son paralelas. Toda línea recta en el plano proyectivo se concibe como teniendo sobre él un punto ideal ("en el infinito"); *todos* los puntos ideales se consideran como constituyendo una *recta ideal,* "la *recta* del infinito".

[2] Esta definición y otras de un carácter similar han sido tomadas de la obra de John Wesley Young, *Projective Geometry* (Chicago, 1930). Este librito es comprensible para todo el que tenga conocimientos elementales de Geometría.

El propósito de estas concepciones es evitar los enunciados de excepción en la Geometría euclidiana necesarios para la postulada existencia de paralelas. Esto ya ha sido comentado en relación con el principio de la continuidad formulado por Poncelet.
Con estos juicios preliminares, puede ser ahora establecido el *principio de dualidad* en Geometría plana. Todas las proposiciones de la Geometría proyectiva plana se corresponden doblemente de tal modo que de una propiedad particular se puede deducir inmediatamente otra intercambiando los papeles desempeñados por las palabras punto y línea.
En su Geometría proyectiva, Poncelet exploró este principio hasta el límite. Abriendo al azar cualquier libro de Geometría proyectiva encontraremos casi seguramente páginas de proposiciones impresas a dos columnas: un recurso introducido por Poncelet. Las proposiciones de ambas columnas se corresponden entre sí; probada una, la prueba de la otra es superflua, según afirma el principio de la dualidad. Así, la Geometría se duplica en extensión de un solo golpe sin necesidad de nueva labor. Como un ejemplo de proposiciones dobles mencionaremos el siguiente par:

Figura 5. Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una.

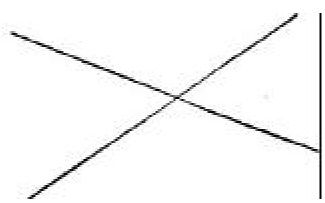


Figura 6. Dos rectas distintas determinan un punto y sólo uno

Como se ve, esto no es muy extraordinario. El parto de los montes ha dado lugar a un ratón.
La proposición de la figura 7 corresponde al *Hexagrammum Mysticum* de Pascal, ya mencionado; la figura 8 es el teorema de Brianchon, que fue *descubierto* por medio del principio de la dualidad. Brianchon (1785-1864) descubrió su teorema siendo estudiante en la Escuela Politécnica, y fue publicado en el *Journal* de esa escuela en 1806. Las figuras de las dos proposiciones realmente no se parecen en nada, y esto indica el poder de los métodos usados por Poncelet.
El descubrimiento de Brianchon fue el que colocó el principio de la dualidad en el terreno de la Geometría. Ejemplos muchos más espectaculares del poder del principio se encuentran en cualquier manual de Geometría proyectiva, particularmente en la ampliación del principio al espacio ordinario tridimensional. En esta extensión los papeles desempeñados por las palabras punto y plano son intercambiables: la línea recta permanece como tal.

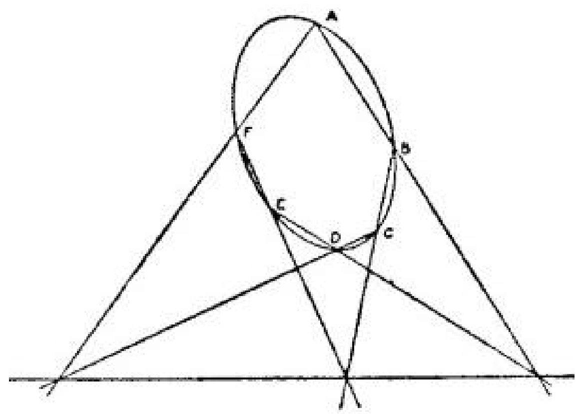


Figura 7. Si A, B, C, D, E, F son puntos de una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos *AB y PE, BC* y *EF, CD y FA* del hexágono inscrito en la cónica, están en línea recta.

La notable belleza de la Geometría proyectiva y la flexible elegancia de sus demostraciones la hicieron el estudio favorito de los geómetras del siglo XIX.

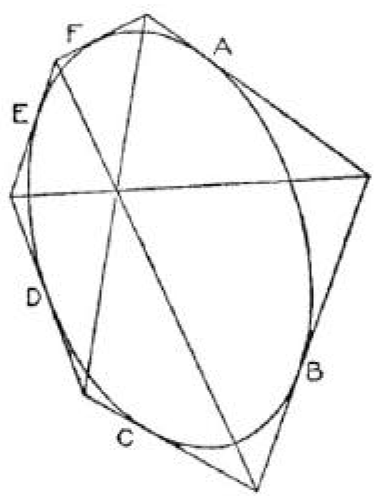


Figura 8. Si A, B, C, D, E, F son tangentes a una cónica, las rectas que unen los pares de vértices opuestos del hexágono circunscrito a la cónica, se cortan en un punto.

Los hombres de talento encontraron una nueva mina de oro, y rápidamente obtuvieron sus tesoros más accesibles. Actualmente, la mayoría de los especialistas parecen estar de acuerdo en que el problema ha sido bien estudiado y tiene interés para los matemáticos profesionales. Sin embargo se concibe que aún puede haber cosas como el principio de dualidad que hayan pasado inadvertidas. De todos modos es un tema fascinante para los aficionados y también para los profesionales en cierta fase de su carrera.

A diferencia de algunos otros campos de la Matemática, la Geometría proyectiva ha dado lugar a excelentes manuales y tratados, de los que son autores excelentes geómetras, incluyendo el mismo Poncelet.

Capítulo Decimocuarto
EL PRINCIPE DE LA MATEMATICA

GAUSS

La nueva elaboración y desarrollo de la Aritmética sistemática, así como casi todas las otras cosas que ha producido, aparte de la Matemática, nuestro siglo (XIX) en la forma de ideas científicas originales, están ligadas a Gauss.

Leopold Kronecker

Arquímedes, Newton y Gauss son tres hombres que constituyen una clase especial entre los grandes matemáticos y no corresponde a los mortales ordinarios colocarlos en orden a sus méritos. Los tres iniciaron nuevas oleadas en la Matemática pura y aplicada: Arquímedes estimaba su Matemática pura mucho más que sus aplicaciones; Newton parece haber encontrado la principal justificación para sus invenciones matemáticas en el uso científico que de ellas estableció, mientras Gauss declaraba que para él tenía el mismo valor la parte pura y la aplicada. De todos modos, Gauss elevó la Aritmética superior a la categoría de reina de la Matemática.

El origen de Gauss, Príncipe de la Matemática, no era en verdad real. Hijo de padres pobres; había nacido en una miserable casucha en Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777. Su abuelo paterno era un pobre campesino. En 1740 su abuelo se estableció en Brunswick, donde arrastró una precaria existencia dedicado a la jardinería. El segundo de sus tres hijos, Gerhard Diederich, nacido en 1744, fue el padre de Gauss. Aparte de este gran honor, la Vida de Gerhard, dedicada los trabajos pesados de jardinero, constructor de canales y albañil**,** no se distingue por ningún motivo.

Se dice que el padre de Gauss era un hombre brusco, escrupulosamente honrado, y cuya rudeza para con su hijo algunas veces lindaba en la brutalidad. Su lenguaje era grosero y su mano pesada. Su honradez y su tenacidad le permitieron cierto grado de comodidades, pero su vida jamás fue fácil. No es sorprendente que tal hombre hiciera todo lo que estaba en su mano para que su hijo se frustrase, impidiéndole adquirir una educación adecuada a su capacidad. Si la opinión del padre hubiera prevalecido, el inteligente muchacho habría seguido una de las profesiones familiares, y fue tan sólo una serie de felices incidentes la que salvó a Gauss de ser jardinero o albañil. Siendo niño era respetuoso y obediente, y aunque jamás criticó a su padre en su vida ulterior, se comprende que jamás sintió por él verdadero cariño. Gerhard murió el año 1806.

Por el lado materno Gauss fue en realidad más afortunado. El padre de Dorothea Benz era picapedrero, y murió teniendo 30 años, de tuberculosis, consecuencia de las condiciones poco higiénicas de su oficio; dejó dos hijos, Dorothea y un hermano menor, Friederich.

Aquí el origen del genio de Gauss aparece de modo evidente. Condenado por su miseria económica al oficio de tejedor, Friederich era un hombre muy inteligente y genial, cuyo cerebro agudo e inquieto se nutría en campos muy lejanos de los que le proporcionaban la subsistencia material. Friederich se hizo pronto una notable reputación como tejedor de los más finos damascos, un arte que aprendió por sí mismo. Al encontrar en el hijo de su hermana una mente afín a la suya, el inteligente tío Friederich hizo cuanto pudo para despertar la rápida lógica del muchacho mediante sus observaciones atinadas y con su filosofía algo zumbona de la vida.

Friederich sabía lo que hacía; Gauss en aquella época probablemente no. Pero Gauss tenía una memoria fotográfica y conservó las impresiones de su infancia de un modo perfecto hasta el día de su muerte. Siendo ya adulto recordaba lo que Friederich había hecho por él, y pensaba que con la muerte prematura de aquel hombre "se había perdido un genio innato".

Dorothea se trasladó a Brunswick en 1769. Teniendo 34 años (1776) contrajo matrimonio. El año siguiente nació su hijo, cuyo nombre bautismal era Johann Friederich Carl Gauss. En su vida posterior firmó sus obras maestras con el nombre Carl Friederich Gauss. Si un gran genio se perdió en Friederich Benz, su nombre sobrevivió en su sobrino.

La madre de Gauss era una mujer recta, de gran carácter, de inteligencia aguda y humor alegre. Su hijo constituyó su orgullo desde el día de su nacimiento hasta que ella murió, teniendo 97 años. Cuando el "niño prodigio" tenía dos años asombraba por su extraordinaria inteligencia, que no parecía terrenal, y esa inteligencia mantuvo y hasta superó, al llegar a la pubertad, las promesas de su infancia. Dándose cuenta de ello, Dorothea Gauss defendió al muchacho frente a la obstinación de su marido, que quería mantener a su hijo tan ignorante como él era.

Dorothea esperaba grandes cosas de su hijo. Quizá dudó en alguna ocasión de que su sueño se realizara, como lo demuestran sus preguntas a quien estaba en posición de juzgar el talento de su vástago. Así, cuando Gauss tenía 19 años, la madre preguntó a su amigo el matemático Wolfgang Bolyai, si Gauss llegaría a ser algo. . Cuando Bolyai exclamó "¡Será el más grande matemático de Europa!", ella rompió en lágrimas.

Los últimos 22 años de su vida transcurrieron en la casa de su hijo y durante los últimos cuatro, estaba totalmente ciega. A Gauss poco le importaba la fama, pero sus triunfos constituían la vida de la madre[1]. Entre ellos existió siempre la más completa comprensión, y Gauss pagó su valerosa protección de sus primeros años procurándoles una vejez tranquila.

Cuando quedó ciega, su hijo no permitió que la cuidara otra persona que no fuera él, y sus cuidados se prolongaron hasta su última y larga enfermedad. Murió el 19 de abril de 1839.

De los muchos accidentes que pudieron haber privado a la Matemática de hombres como Arquímedes y Newton, también Gauss recuerda uno ocurrido en su primera infancia. Una crecida primaveral llenó el canal que rodeaba la casucha de la familia, inundando el terreno. Gauss que jugaba cerca del agua casi se ahogó. Pero por feliz casualidad un labrador pudo impedir que su vida terminara allí.

En toda la historia de la Matemática no hay nada que se acerque a la precocidad demostrada por Gauss. Se ignora el momento en que Arquímedes comenzó a dar muestras de su genio, y las precoces

---

[1] Todavía no está demostrada la leyenda de las relaciones de Gauss con sus padres. Aunque, como veremos más tarde, la *madr*e defendía a su hijo, el *padre* se oponía, y como era habitual *entonces* (y también *ahora*) en un hogar alemán, el padre decía la última palabra. Aludiré más tarde a narraciones de personas que aun viven y que conocieron a los miembros de la familia Gauss, especialmente en lo que concierne a cómo trataba Gauss a su hijo. Estas alusiones constituyen pruebas directas, pero no hay que fiarse de ellas, pues las personas a que me refiero eran muy ancianas.

manifestaciones del talento matemático de Newton pasaron inadvertidas. Aunque parezca increíble, Gauss demostró lo que era antes de cumplir los tres años.

Un sábado, Gerhard Gauss estaba echando sus cuentas para pagar a los trabajadores que se hallaban a su cargo, sin darse cuenta de que su hijito seguía esas cuentas con notable atención. Terminados sus largos cálculos**,** Gerhard quedó asombrado al oír que el niño le decía: "La cuenta está mal, debe ser..." Al comprobar las operaciones se pudo ver que las cifras encontradas por el pequeño Gauss eran exactas.

Antes de ésto el niño pudo conocer de sus padres y de los amigos de éstos la pronunciación de las letras del alfabeto y aprendió por sí solo a leer. Nadie le había hablado de la Aritmética, aunque probablemente comprendió la significación de los dígitos 1, 2... al enumerar el alfabeto. En su vida posterior le divertía decir que supo contar antes que hablar. Este prodigioso poder para los cálculos mentales, persistió durante toda su vida.

Poco después de cumplir siete años Gauss ingresó en la escuela primaria, una verdadera reliquia de la Edad Media, regida por un bárbaro, un tal Büttner, quien para enseñar a un centenar de muchachos que se hallaban a su cargo, les sumergía en un estado de estupidez aterrorizada, en la que hasta olvidaban sus nombres. En este infierno Gauss encontró su fortuna.

Nada extraordinario sucedió durante los dos primeros aires. Al cumplir los 10, Gauss ingresó en la clase de Aritmética. Como se trataba de las primeras clases, ninguno de los muchachos había oído hablar de una progresión aritmética. Fácil era al heroico Büttner plantear un largo problema de sumas cuya respuesta podía encontrar en pocos segundos valiéndose de una fórmula.. El problema era del siguiente tipo: 81297 + 81495 + 81693...+ 100899, donde el paso de un número a otro es siempre el mismo (198), debiendo sumarse un cierto número de términos (100).

La costumbre de la escuela era que el muchacho que primero hallaba la respuesta, colocase su pizarra sobre la mesa, el siguiente colocaba la suya sobre la primera y así sucesivamente. Büttner acababa de plantear el problema cuando Gauss colocó su pizarra sobre la mesa: "Ya está", dijo *"Ligget se"*, en su dialecto campesino. Durante toda una hora, mientras los compañeros trabajaban afanosamente, continuó sentado con los brazos cruzados, favorecido de cuando en cuando por una sarcástica mirada de Büttner, quien se imaginaba que el muchachito era un perfecto necio. Al terminar la clase, Büttner examinó las pizarras. En la pizarra de Gauss aparecía un solo número. Cuándo era viejo, a Gauss le gustaba decir que el número que había escrito, constituía la respuesta exacta y que los demás se habían equivocado. Gauss no conocía la estratagema para realizar esos problemas rápidamente. Es muy sencillo una vez conocido el ardid; pero es extraordinario que un muchacho de 10 años, pudiera descubrirlo instantáneamente.

En ese momento se abrió la puerta a través de la cual Gauss pasó a la inmortalidad. Büttner estaba tan asombrado de que un muchacho de 10 años sin instrucción hubiera realizado tal proeza, que desde aquel momento fue, al menos para uno de *sus* discípulos, un maestro humano. De su propio peculio compró el mejor manual de Aritmética que pudo encontrar y se lo entregó a Gauss. El muchacho hojeó rápidamente el libro. "Es superior a mí, dijo Büttner, nada puedo enseñarle".

Büttner probablemente no pudo hacer mucho más en favor del joven genio. Pero por una feliz casualidad el maestro tenía un ayudante, Johann Martín Bartels (1769-1836) un joven que tenía gran pasión por la Matemática, y cuyo deber consistía en ayudar a los principiantes en la escritura, cortándoles las plumas de ave. Entre el ayudante de 17 años y el discípulo de 10 se estableció una

cálida amistad que duró toda la vida de Bartels. Estudiaron juntos ayudándose recíprocamente en las dificultades, y analizaban las pruebas en el manual de Álgebra y de rudimentos de Análisis que poseían.
Desde los primeros momentos pudo verse uno de los intereses dominantes de la carrera de Gauss.
Rápidamente comprendió el teorema del binomio

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1*2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1*2*3}x^3+...,$$

en el que *n* no es necesariamente un número entero positivo, sino que puede ser un número cualquiera.
Si *n* no es un entero positivo, la sucesión del segundo miembro es *infinita*, y para establecer el teorema cuando esta sucesión es igual a $(1+x)^n$, es necesario determinar las limitaciones que hay que imponer a x y n, para que la serie infinita *converja hacia un límite finito definido.* Así, *si* $x = -2$ y $n = -1$, tendremos el absurdo de que $(1-2)^{-1}$, que es $(-1)^{-1}$ ó 1/(-l), o finalmente -1, es igual a $1+2+2^2+2^3+...$ y así hasta *ad infinitum*; es decir, -1 es igual al "número infinito" 1+2+4+8..., lo que no tiene sentido alguno.
Antes de que el joven Gauss se preguntara a sí mismo si la serie infinita converge y realmente nos capacita para calcular las expresiones matemáticas (funciones), que deben representar, los más viejos analistas no se habían tomado la molestia de explicar los misterios (y falta de sentido común) que surgen del empleo falto de crítica de los procesos infinitos. El primer encuentro de Gauss con el teorema del binomio le inspiró la realización de alguna de sus más grandes obras, y fue el primero de los "rigoristas".
Una demostración del teorema del binomio cuando *n* no es un número entero positivo, todavía hoy está más allá de los límites de un manual elemental. No satisfecho con lo que él y Bartels encontraban en los libros, Gauss inventó una nueva demostración, iniciándose así en el Análisis matemático. La verdadera esencia del Análisis es el uso correcto de los procesos infinitos.
La obra comenzada con tan buenos auspicios iba a cambiar todo el aspecto de la Matemática.
Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, todos los grandes analistas de su tiempo, no tenían prácticamente un concepto claro de lo que se acepta ahora como una prueba que abarca los procesos infinitos. Fue Gauss el primero en ver claramente que una "demostración" que puede llevar a absurdos como el de que "menos 1 igual a infinito", no prueba nada. Aún en algunos casos en que una fórmula da resultados consecuentes, no debe ocupar un lugar en la Matemática hasta que se determinan las condiciones precisas en que continúa siendo coherente.
El rigor que Gauss impuso al Análisis se proyectó sobre toda la Matemática, tanto en sus propias costumbres como en la de sus contemporáneos, Abel, Cauchy y sus sucesores, Weierstrass, Dedekind, y toda la Matemática después de Gauss fue algo diferente de lo que había sido la Matemática de Newton, Euler y Lagrange.
En el sentido constructivo Gauss fue un revolucionario. Antes de que terminara su enseñanza secundaria, el mismo espíritu crítico que le impidió quedar satisfecho con el teorema del binomio le llevó a discutir las demostraciones de la Geometría elemental. A la edad de 12 años ya miraba con recelo los fundamentos de la Geometría euclidiana, y teniendo diez y seis, ya tuvo la primera intuición de una geometría diferente de la de Euclides. Un año más tarde comenzó a someter a la crítica las demostraciones de la teoría de números que habían dejado satisfechos a sus predecesores, y se entregó a la tarea extraordinariamente difícil de llenar las lagunas y *completar* lo que había sido hecho a medias.
La Aritmética, el campo de sus primeros triunfos, constituyó su estudio favorito, donde realizó sus obras

maestras. A sus propias ideas respecto a lo que constituye la prueba, Gauss añadió una capacidad inventiva matemática tan prolífica que jamás ha sido superada. Esta combinación resultaba invencible. Bartels hizo algo más que guiar a Gauss en los misterios del Álgebra. El joven profesor conocía a algunos de los hombres más influyentes de Brunswick, quienes favorablemente impresionados por el genio de Gauss, llamaron la atención de Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Brunswick.

El duque recibió a Gauss por primera vez en 1791. Gauss tenía 14 años. La modestia y la timidez del muchacho ganaron la simpatía del generoso duque. Gauss obtuvo la seguridad de que su educación podría continuar. El siguiente año (febrero, 1792), Gauss se matriculó en el *Collegium Carolinum* de Brunswick. El duque pagó los gastos y continuó pagándolos hasta que la educación de Gauss terminó.

Antes de ingresar en el Colegio Carolino, a la edad de 15 años, Gauss había hecho grandes progresos en los idiomas clásicos, cuyo estudio realizó privadamente ayudado por antiguos amigos, precipitando así una crisis en su carrera. A su tosco y práctico padre el estudio de las lenguas muertas le llevaron casi a la locura; Dorothea Gauss luchó por su hijo, ganó la batalla, y el duque pagó un curso de dos años en el Instituto. La facilidad con que Gauss dominaba el griego y el latín**,** asombró por igual a los maestros y a los compañeros.

Gauss se sentía atraído por los estudios filológicos, pero, por fortuna, para la ciencia, iba a encontrar mayor atracción en la Matemática. Al ingresar en el Colegio Carolino conocía ya el latín de tal forma que pudo escribir en ese idioma sus obras más importantes. Fue una calamidad, nunca suficientemente lamentada, que hasta el ejemplo de Gauss fuera impotente frente a las oleadas del nacionalismo fanático que invadió Europa después de la Revolución francesa y la caída de Napoleón. En lugar del fácil latín que fue suficiente para Euler y Gauss, ahora hay que lograr un rápido conocimiento de dos o tres idiomas aparte del propio. Gauss se resistió cuanto pudo, pero tuvo que someterse cuando sus amigos de Alemania le presionaron para que escribiera en alemán algunas de sus obras astronómicas.

Gauss estudió en el Colegio Carolino durante tres años, comprendiendo a la perfección las obras más importantes de Euler, Lagrange y sobre todo los *Principia* de Newton. El más alto orgullo de un gran hombre es recibir la estimación de los que son como él. Gauss nunca disminuyó la alta estima que, cuando tenía 17 años, tuvo por Newton. Los demás, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, aparecen en el fluido latín de Gauss con la cortés calificación *clarissimus*; Newton es *summus*.

Estando aún en el Colegio, Gauss comenzó las investigaciones de Aritmética superior que le harían inmortal. Entonces puso en juego su prodigiosa capacidad para el cálculo. Dirigiéndose directamente a los números, experimentó con ellos, descubriendo por inducción teoremas generales difíciles, cuyas demostraciones le costaron gran esfuerzo. En esta forma redescubrió "la joya de la Aritmética", el *"theorema aureum*", al cual Euler llegó también por inducción, o sea la ley de reciprocidad cuadrática, que Gauss iba a ser el primero en demostrar (la prueba intentada por Legendre fracasó).

Toda la investigación se originó en una sencilla cuestión que muchos principiantes en Aritmética se plantean. ¿Cuántas cifras tiene el período de una decimal periódica? Para arrojar alguna luz sobre el problema Gauss calculó los desarrollos decimales de todas las fracciones $1/n$ para $n = 1$ hasta 1000. No encontró el tesoro que buscaba, sino algo infinitamente superior, la ley de reciprocidad cuadrática. Como puede exponerse con sencillez la explicaremos, mencionando al mismo tiempo una de las conquistas revolucionarias de la nomenclatura y notación aritmética que Gauss inventó, la de la *congruencia*. En lo que sigue todos los números son enteros (números enteros comunes).

Si la *diferencia* ($a - b$ *ó* $b - a$) de dos números a, b es exactamente divisible por el número m, decimos que a, b son *congruentes* con respecto al módulo m, y simbolizamos esto escribiendo

$$a \equiv b \text{ (mód } m). \text{ Así, } 100 \equiv 2 \text{ (mód 7)}, 35 \equiv 2 \text{ (mód 11)}.$$

La ventaja de esta notación es que recuerda la forma en que escribimos las ecuaciones algebraicas, recoge el concepto algo ilusorio de la divisibilidad aritmética en una breve notación y sugiere que intentamos llevar a la Aritmética, (que es mucho más difícil que el Álgebra), algunas de las manipulaciones que conducen a interesantes resultados. Por ejemplo, podemos "sumar" ecuaciones y encontramos que las congruencias pueden también ser "sumadas", con tal de que el módulo sea el mismo en todas, para obtener otras congruencias.

Llamemos x a un número desconocido y r y m a determinados números de los cuales r no es divisible por m. ¿Existe un número x tal que x^2 º r (mód m)?

Si existe, r se llama un *resto cuadrático de m*; si no, un *no-resto* cua*drático de m*.

Si r es un resto cuadrático de m, debe ser posible encontrar al menos un x cuyo cuadrado, cuando se divida por m, deje de resto r; si r es un no-resto cuadrático de m, no hay ningún x cuyo cuadrado, dividido por m, dé r de resto. Estas son consecuencias inmediatas de las definiciones precedentes.

Ilustremos el caso: ¿es 13 un resto cuadrático de 17? Si lo es, debe ser posible la *congruencia*.

x^2 º 13 (mód 17)

Ensayando 1, 2, 3... encontraremos que x = 8, 25, 42, 59,... son soluciones (81 = 64 = 3 * 17 + 13; 25^2 = 625 = 36 * 17 + 13; etc.), de modo que 13 *es* un resto cuadrático de 17. Pero la congruencia $x^2 \equiv 5$ (mód 17) no tiene solución, de modo que 5 es un no-resto cuadrático de 17.

Es ahora natural preguntarse ¿cuáles son los restos y no-restos cuadráticos de un número dado m? Suponiendo $x^2 \equiv r$ (mód m), ¿qué números r pueden aparecer y qué números r no pueden aparecer cuando x toma todos los valores 1, 2, 3 ... ?

Sin gran dificultad puede demostrarse que esto es suficiente para responder a la cuestión cuando *r y m* son primos. Veamos el problema: si p es un primo *dado* ¿qué primo q hará la congruencia x^2 º q (mód p) soluble? Esto es preguntar mucho en el estado actual de la Aritmética. Sin embargo, la situación no es totalmente desesperada.

Existe una bella "reciprocidad" entre el par de congruencias

$$x^2 \equiv q \text{ (mód } p), \; x^2 \equiv p \text{ (mód } q)$$

en la que tanto p como q son primos; ambas congruencias son *posibles* o *ambas* son *imposibles, a no ser que tanto p como q* den el resto 3 cuando se dividen por cuatro, en cuyo caso *una* de las congruencias *es* posible y la *otra* no. Esta es la ley de reciprocidad cuadrática.

No era fácil de probar. En efecto, esto desconcertó a Euler y Legendre. Gauss dio la primera prueba teniendo 19 años. Como esta reciprocidad es de importancia fundamental en la Aritmética superior y en muchas partes del Álgebra, Gauss meditó durante muchos años tratando de encontrar la solución, hasta que encontró seis pruebas diferentes, una de las cuales depende de la construcción con regla y compás de los polígonos regulares.

Un ejemplo numérico aclarará el enunciado de la ley. Primero consideremos $p = 5$, $q = 13$. Puesto que 5 y 13 dan 1 de resto al ser divididos por 4, tanto $x^2 \equiv 13$ (mód 5) como $x^2 \equiv 5$ (mód 13) deben

tener solución o no la tiene ninguna de estas dos congruencias. Lo último es lo que ocurre para este par. Tanto p = 13 como q = 17, dejan el resto 1 al ser divididos por 4, y tendremos $x^2 \equiv 17$ (mód 13), $x^2 \equiv 13$ (mód 17) y *ambas* o *ninguna* deben ser solubles. En este caso ocurre lo primero: la primera congruencia tiene las soluciones x = 2, 15, 28 ... - la segunda tiene las soluciones x = 8, 25, 42...
Queda por ver ahora el caso en que *tanto p como q* den el resto 3 al dividirlos por 4. Consideremos p = 11, q = 19. De acuerdo con la ley, *precisamente una* de las congruencias $x^2 \equiv 19$ (mód 11), $x^2 \equiv 11$ (mód 19) debe tener solución. La primera congruencia no tiene solución; la segunda tiene las soluciones 7, 26, 45...
El simple descubrimiento de tal ley fue una notable adquisición. Quien intente demostrar lo que Gauss demostró teniendo 19 años, comprenderá que era algo más que un simple aficionado a la Matemática.
Cuando Gauss abandonó el Colegio Carolino, en octubre de 1795, teniendo 18 años, para ingresar en la Universidad de Göttingen, aun no había decidido si como objetivo de su vida elegiría la Matemática o la Filología. Había ya inventado (cuando tenía 18 años), el método de los "mínimos cuadrados", que en la actualidad es indispensable en las mediciones geodésicas, en la reducción de las observaciones y en todos los estudios donde el valor "más probable" de alguna cosa que se está midiendo debe ser inferida de gran número de mediciones. Gauss participó de este honor con Legendre, quien publicó el método independientemente de Gauss en el año 1806. Este trabajo marca el comienzo del interés de Gauss por la teoría de los errores de observación. La ley de Gauss de la distribución normal de los errores y su curva en forma de campana es familiar actualmente a todos los que se ocupan de estadística, desde las mentes más altas, hasta los inescrupulosos manipuladores de los mercados.
El 30 de marzo de 1796 marca el punto decisivo en la carrera de Gauss. Ese día, exactamente un mes antes de que cumpliera 20 años, Gauss se decidió resueltamente en favor de la Matemática. El estudio de las lenguas siguió siendo una de sus diversiones, pero la filología perdió a Gauss para siempre en aquel día memorable de marzo.
Como ya hemos dicho en el capítulo sobre Fermat, el polígono regular de 17 lados fue el que indujo a Gauss a cruzar su Rubicón. El mismo día Gauss comenzó a escribir su diario científico *(Notizenjournal). É*ste es uno de los documentos más preciosos de la historia de la Matemática. La primera anotación recoge su gran descubrimiento.
El diario no tuvo circulación científica hasta 1898, cuarenta y tres años después de la muerte de Gauss, cuando la Sociedad Real de Göttingen pidió al nieto de Gauss prestase el libro para su estudio crítico. Se compone de diecinueve páginas en octavo pequeño y contiene 146 exposiciones extraordinariamente breves de descubrimientos o resultados de cálculos, la última de las cuales está fechada el 9 de julio de 1814. Un facsímil fue publicado en 1917, en el décimo volumen (parte I) de las obras completas de Gauss, en unión de un detenido análisis de su contenido hecho por diversos especialistas. En este libro no fueron recogidos todos los descubrimientos de Gauss en el período prolífico de 1796 a 1814. Pero muchos de los anotados bastarían para establecer la prioridad de Gauss en campos, funciones elípticas, por ejemplo, donde algunos de sus contemporáneos se niegan a creer que Gauss les precediera. (Recuérdese que Gauss había nacido en 1777).
Muchos hallazgos que quedaron enterrados durante años o décadas en este diario habrían labrado media docena de grandes reputaciones de haber sido publicados rápidamente. Algunos jamás se hicieron públicos durante la vida de Gauss, y nunca pretendió la prioridad cuando otros autores se le anticiparon. Estas anticipaciones no se referían a cosas triviales. Algunas de ellas constituían descubrimientos esenciales de la Matemática del siglo XIX**.**

Algunas de las anotaciones indican que el diario era cosa estrictamente privada de su autor. Así, el 10 de julio de 1796, la anotación dice

$$\text{EYPHKA! núm} = \Delta + \Delta + \Delta$$

Después del exultante "Eureka!" de Arquímedes, afirma que todo número entero positivo es la suma de tres números triangulares, tal número es uno de la sucesión 0, 1, 3, 6, 10, 15,... donde cada uno (después del 0) es de la forma $1/2^n(n + l)$, siendo n un número entero positivo. Otra forma de decir lo mismo es que todo número de la forma 8n + 3 es una suma de tres cuadrados impares: $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$; $11 = 1 + 1 + 3^2$; $19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$, etc. No es fácil demostrar esto de un modo casual.

Menos inteligible es la misteriosa anotación del 11 de octubre de 1796, "Vicimus GEGAN". ¿A qué dragón venció Gauss esa vez? ¿A qué gigante sometió el 8 de abril de 1799 cuando encierra las palabras REV. GALEN en un rectángulo aislado? Aunque la significación de esas palabras se haya perdido para siempre, las restantes 144 anotaciones son en su mayor parte bastante claras. Una en particular tiene extraordinaria importancia, como veremos al ocuparnos de Abel y Jacobi. La anotación del 19 de marzo de 1797 muestra que Gauss había ya descubierto la doble periodicidad de ciertas funciones elípticas. Tenía entonces veinte años. Además, otra anotación muestra que Gauss reconoció la doble periodicidad en el caso general. Este descubrimiento, por sí solo, de haber sido publicado, podría haberle hecho famoso inmediatamente, pero jamás lo publicó.

¿Por qué Gauss reservaba las grandes cosas que descubría? Esto es más fácil de explicar que su genio, si aceptamos sus sencillos juicios, que ahora mencionaremos. Una versión más romántica es la recogida por W. W. R. Ball, en su conocida historia de la Matemática. Según este autor, Gauss sometió su primera obra maestra, las *Disquisitiones Arithmeticae* a la Academia Francesa de Ciencias, que la rechazó despectivamente. Esta humillación inmerecida hirió a Gauss tan profundamente que desde entonces resolvió publicar tan sólo aquello que podía ser admitido sin crítica, tanto en su fondo como en su forma. Pero ésta versión fue desechada para siempre en 1935, cuando la Academia Francesa, después de un detenido estudio de los informes, demostró que las *Disquisitiones* nunca fueron presentadas a la Academia, y menos rechazadas.

Hablando de sí mismo, Gauss dice que emprendía sus estudios científicos tan sólo como una respuesta a los impulsos más profundos de la naturaleza, y para él era algo completamente secundario publicarlos para el conocimiento de los demás. Otro juicio de Gauss, comunicado en una ocasión a un amigo, explica tanto su diario como la lentitud en la publicación. Gauss afirmaba que cuando tenía veinte años era tal la cantidad de nuevas ideas que pasaban por su mente, que difícilmente podía recogerlas, y sólo disponía para ello de brevísimo tiempo. El diario contiene tan sólo los juicios breves finales de los resultados de complicadas investigaciones, algunas de las cuales le ocuparon durante semanas. Cuando siendo joven contemplaba la serie de pruebas sintéticas que habían encadenado las inspiraciones de Arquímedes y Newton, Gauss resolvió seguir su gran ejemplo, y tan sólo dejar obras de arte perfectas y completas a las que nada pudiera ser añadido y a la que nada pudiera ser restado, sin desfigurar el conjunto. La obra por sí debe ser completa, sencilla y convincente, sin que pueda encontrarse signo alguno que indique el trabajo que ha costado lograrla. Una catedral, decía, no es una catedral hasta que ha desaparecido de la vista el último andamio. Trabajando con este ideal, Gauss prefería pulir una obra maestra varias veces, en vez de publicar los amplios esquemas de muchas de ellas, como pudo fácilmente hacer. Su sello, un árbol con pocos frutos, lleva el lema *Pauca sed matura*. (Pocos, pero maduros).

Los frutos de este esfuerzo hacia la perfección eran en efectos maduros, pero no siempre digeribles. Todas las huellas de los pasos para llegar a la meta habían sido borradas, y no fue fácil para los continuadores de Gauss descubrir el camino que siguió. En consecuencia, algunas de sus obras han tenido que esperar a que intérpretes de gran talento las hicieron comprensibles, para que los matemáticos pudieran incorporarlas a su obra y aplicar su significación a problemas no resueltos. Sus propios contemporáneos le pidieron que abandonara su frígida perfección con objeto de que la Matemática pudiera avanzar más rápidamente, pero Gauss no hizo caso. Hasta mucho tiempo después de su muerte no se ha sabido hasta qué grado previó y se anticipó, antes del año 1800, a la Matemática del siglo XIX. De haber divulgado lo que sabía es muy posible que la Matemática se hallara medio siglo más allá de donde está. Abel y Jacobi podrían haber comenzado donde Gauss terminó, en lugar de emplear gran parte de su esfuerzo para volver a descubrir cosas que Gauss conocía antes de que ellos nacieran, y los creadores de las Geometrías no euclidianas podrían haber dirigido su genio hacia otras cosas.

Gauss decía de sí mismo que era "todo matemático". Este juicio sería injusto si no se tuviera en cuenta que un "matemático" de aquellos días era lo que hoy sería denominado un físico matemático. En efecto, su segundo lema[2]

Thou, nature, art my goddes; to thy laws
My services are bound...,

resume su vida de devoción a la Matemática y a las ciencias físicas de su época. El calificativo "todo matemático" debe comprenderse únicamente en el sentido de que no dispersó sus talentos magníficos en otros campos donde podría haber obtenido abundante cosecha, como hizo Leibniz, sino que cultivó su máximo talento a la perfección.

Los tres años (octubre 1795-septiembre 1798) en la Universidad de Göttingen fueron los más prolíficos de la vida de Gauss. Gracias a la generosidad del Duque Ferdinand, el joven no se vio abrumado por dificultades económicas. Se entregó a su obra, teniendo pocos amigos. Uno de ellos, Wolfgang Bolyai, "el espíritu más raro que he conocido", según le califica Gauss, fue su amigo durante toda la vida. El curso de esta amistad y su importancia en la historia de las Geometrías no euclidianas es demasiado largo para que pueda ser referido en este lugar. Johann, hijo de Wolfgang, tuvo que seguir prácticamente la misma senda que Gauss siguió para la creación de una Geometría no euclidiana, ignorando completamente que amigos de su padre le había precedido. Las ideas que inundaron a Gauss desde que tenía 17 años fueron ahora recogidas en parte y puestas en orden. Desde 1795 había estado meditando en una gran obra acerca de la teoría de números, que tomó forma definida y prácticamente fue terminada en 1798, constituyendo las *Disquisitiones Arithmeticae*.

Para familiarizarse con lo que había sido hecho en Aritmética superior, y para estar seguro de que prestaba debida atención a sus predecesores, Gauss acudió a la Universidad de Helmstedt, donde existía una excelente biblioteca matemática, en septiembre de 1798. Fue cordialmente recibido por el bibliotecario y profesor de Matemática Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) en cuya casa se alojó.

[2] Shakespeare, *El Rey Lear*, Acto I, escena II, 1-2, con el cambio esencial de "ley" por "leyes".

Gauss y Pfaff fueron excelentes amigos, aunque la familia Pfaff pocas veces vio a su huésped. Pfaff pensaba que era su deber cuidarse de que su joven amigo hiciera algún ejercicio y él y Gauss paseaban juntos durante la tarde hablando de Matemática. Como Gauss no sólo era modesto, sino también reservado acerca de su propia obra, Pfaff probablemente no aprendió tanto como hubiera podido de ser diferente el carácter de Gauss. Este admiraba mucho al profesor, que era entonces el mejor matemático de Alemania, no sólo por su excelente labor, sino por su carácter sencillo y abierto. Había un tipo de hombres por quien Gauss sentía aversión y desprecio. Los que no reconocen sus fracasos cuando saben que se han equivocado.

Gauss permaneció en Brunswick durante el otoño de 1798 (entonces tenía 21 años) realizando tan sólo algunos viajes a Helmstedt para dar los toques finales a sus *Disquisitiones*. Esperaba su rápida publicación, pero el libro no fue impreso hasta septiembre de 1801 debido a las dificultades puestas por un editor de Leipzig. En gratitud por el apoyo que el duque Ferdinando le había prestado, dedicó su libro al *Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando.*

Si un protector generoso merece el homenaje de su protegido, Ferdinando merecía el de Gauss. Cuando el joven genio se hallaba preocupado por su futuro, después de dejar Göttingen, intentó infructuosamente tener discípulos, el duque acudió a salvarle. Pagó la impresión de su disertación doctoral (Universidad de Helmstedt, 1799), y le concedió una modesta pensión, que le permitió continuar sus trabajos científicos sin verse perseguido por la pobreza. "Vuestra bondad, dice Gauss en su dedicatoria, me han libertado de cualquier otra responsabilidad, permitiéndome aceptar ésta exclusivamente".

Antes de comentar las *Disquisitiones* examinaremos la disertación que valió a Gauss su grado de doctor *in absentia* por la Universidad de Helmstedt, en 1799*: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse.* (Una nueva prueba de que toda función algebraica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado).

Existe sólo un error en esta obra esencial de Álgebra. Las primeras palabras del título implican que Gauss ha añadido simplemente una nueva prueba a las ya conocidas. Debía haber omitido la palabra "nova". La suya era la primera prueba, como veremos más tarde. Alguien antes que él publicó lo que se suponía eran demostraciones de este teorema, de ordinario llamado el teorema fundamental del Álgebra, pero ninguno lo consiguió. Con su rigor lógico y matemático, Gauss se esforzó en obtener una *prueba, y* obtuvo la primera. Otro enunciado equivalente del teorema dice que toda ecuación algebraica con una incógnita tiene una raíz, afirmación que los principiantes consideran como verdadera, sin tener la más remota idea de lo que significa.

Si un loco garrapateara una serie de símbolos matemáticos, no podría decirse que los signos escritos, significaran algo, debido a que el ojo inexperto no pudiera distinguirlos de los de las Matemáticas superiores. Esta suposición sería tan caprichosa como creer que tiene alguna significación afirmar que toda ecuación algebraica tiene una raíz, si no, decimos qué *clase* de raíz tiene la ecuación. Vagamente sentimos que un *número* satisfará la ecuación, pero no sabemos más.

Gauss precisó este sentimiento, demostrando que todas las raíces de cualquier ecuación algebraica son "números" de la forma $a + bi$, donde a, b son números reales (los números que corresponden a las distancias, positiva, cero o negativa, medidas desde un punto fijo 0 sobre una línea recta determinada, como el eje de las x en la Geometría de Descartes) e i la raíz cuadrada de -1. El nuevo tipo de "número" $a + bi$ se llama *número complejo.*

Incidentalmente Gauss fue uno de los primeros en dar una explicación coherente de los números complejos y en interpretarlos como designando los puntos de un plano, tal como se hace hoy en los manuales elementales de Álgebra.

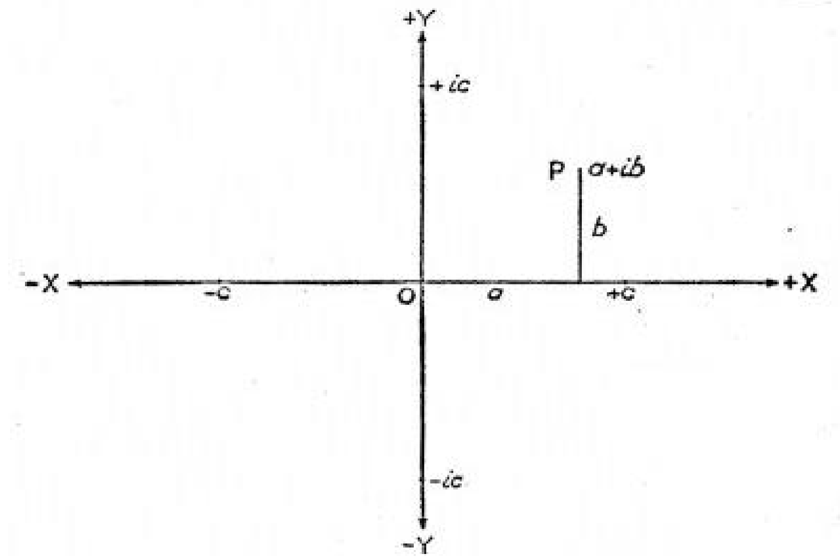


Figura 1

Las coordenadas cartesianas de *P* son (a,b); el punto *P* se denomina también $a + bi$. Así, a cualquier punto del plano corresponde precisamente un número complejo; los números que corresponden a los puntos sobre XOX son "reales", los que están sobre YOY, "imaginarios puros" (todos son del tipo *ic*, donde *c* es un número real).

La palabra "imaginario" es la gran calamidad algebraica, pero está demasiado arraigada para que pueda eliminarse. Jamás debería haber sido usada. Los libros de Álgebra elemental dan una sencilla interpretación de los números imaginarios considerándolos como rotaciones. Si interpretamos la multiplicación $i * c$, donde *c* es real, como una rotación alrededor de *0* del segmento *Oc* siguiendo un ángulo recto, *Oc* gira hasta OY; otra multiplicación por *i*, o sea $i * i * c$, hace girar *Oc* otro ángulo recto, y de aquí que el efecto total es girar *Oc* dos ángulos rectos, de modo que + *Oc* se convierte en -*Oc*. Así como una operación, la multiplicación por $i * i$, tiene el mismo efecto que la multiplicación por -1; la multiplicación por *i* tiene el mismo efecto que una rotación de un ángulo recto, y estas interpretaciones (como justamente hemos visto) son consecuentes. Si queremos podemos ahora escribir $i * i = - 1$ en las operaciones, o $i^2 = - 1$; de modo que la operación de la rotación en un ángulo recto es simbolizada por $\sqrt{-1}$.

Como es natural, todo esto no prueba nada. No significa demostración alguna. *No hay nada que deba ser probado*. Asignamos a los símbolos y operaciones del Álgebra *una situación siempre que* no sea contradictoria. Aunque la *interpretación* por medio de las rotaciones nada *prueba*, sugiere que nadie debe caer en un. estado de mística admiración acerca de los más llamados números "imaginarios". Para otros detalles puede consultarse cualquier manual de Álgebra elemental.

Para Gauss, el teorema referente a que toda ecuación algebraica tiene una raíz, explicado en el justo sentido, tenia tanta importancia, que dio cuatro pruebas diferentes, la última teniendo 70 años. Actualmente, algunos transfieren el teorema desde el Álgebra (que se limita a procesos que pueden ser llevados a través de un número finito de pasos) al Análisis. El mismo Gauss *aceptó* que la gráfica de un polinomio es una curva continua, y que si el polinomio es de grado impar, la gráfica debe cortar el eje al menos una vez. Para cualquier principiante en Álgebra esto es evidente. Pero en la actualidad *no hay evidencia* sin pruebas, y los intentos para probarlo han tropezado con las dificultades relacionadas con la continuidad y el infinito. Las raíces de una ecuación tan sencilla como $x^2 + 2 = 0$ no pueden ser computadas exactamente en un número finito de pasos. Mencionaremos más detalles al ocuparnos de Kronecker, y seguiremos ahora con las *Disquisitiones Arith*meticae.

Las *Disquisitiones* fueron la primera obra maestra de Gauss, siendo considerada por algunos como la más importante. Constituyeron su despedida de la Matemática pura. Después de su publicación en 1801 (Gauss tenía 24 años), su actividad abarcó la astronomía, la geodesia *y* el electromagnetismo, tanto en sus aspectos teóricos como en los prácticos. Pero la Aritmética fue su gran amor, y siempre se lamentó de no haber tenido tiempo para escribir el segundo volumen que planeó siendo joven. El libro tiene siete secciones. Debía haber tenido ocho, pero la octava fue omitida para disminuir el costo de la impresión.

La frase que inicia el prefacio describe el objeto general del libro “Las investigaciones contenidas en esta obra pertenecen a aquella parte de la Matemática que se refiere a los números enteros, siendo siempre excluidos los fraccionarios y los irracionales".

Las tres primeras secciones tratan de la teoría de congruencias, y en ellas se hace especialmente una completa exposición de la congruencia

$$\text{binomia } x^n \equiv A \ (\text{mód } p),$$

donde los números enteros n, A son arbitrarios y p es primo; el número enteró desconocido es x. Esta bella teoría *aritmética* tiene muchas semejanzas con la teoría *algebraica* correspondiente de la *ecuación* binomia $x^n = A$, pero en sus partes propiamente aritméticas es incomparablemente más rica y más difícil que el Álgebra que no ofrece analogías con la Aritmética.

En la cuarta sección Gauss desarrolló la teoría de restos cuadráticos. Aquí se encuentra la primera *demostración* publicada de la ley de reciprocidad cuadrática. La prueba es una asombrosa aplicación de la inducción matemática, y una muestra de esa ingeniosa lógica que se encontrará en otros lugares de su obra.

En la quinta sección se presenta desde el punto de vista aritmético la teoría de las formas cuadráticas binarias, acompañada de una discusión de las formas cuadráticas ternarias, necesaria para completar la teoría binaria. La ley de reciprocidad cuadrática desempeña un papel fundamental en estas difíciles cuestiones. Para las primeras formas citadas el problema general es encontrar la solución en números enteros x, y de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

donde a, b, c, m son números enteros cualesquiera; para la segunda, las soluciones en números enteros x, y, de

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dxz + 2eyz + fz^2 = m,$$

donde *a, b, c, d, e, f, m* son números enteros cualesquiera, constituyen el tema de la investigación. Una cuestión al parecer sencilla, pero en realidad difícil, es imponer las limitaciones necesarias y suficientes sobre *a, c, f, m* que aseguren la existencia de una solución en números enteros *x, y, z* de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 = m.$$

La sexta sección aplica la teoría precedente a varios casos especiales, por ejemplo, las soluciones, en números enteros *x, y* de $mx^2 + ny^2 = A$, donde *m, n, A* son números enteros cualesquiera.
En la séptima y última sección, que puede considerarse como la coronación de la obra, Gauss aplica los desarrollos precedentes, particularmente la teoría de las congruencias binómicas, a una maravillosa discusión de la ecuación algebraica

$$x^n = 1,$$

donde *n* es número entero cualquiera, tejiendo en una perfecta trama la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. La ecuación $x^n = 1$ es la fórmula algebraica del problema geométrico para construir un polígono regular de *n* lados, o de dividir una circunferencia en *n* partes iguales (consúltese cualquier texto elemental de Álgebra o Trigonometría); la *congruencia aritmética*

$$x^m \equiv 1 \ (\text{mód } p),$$

donde *m, p* son números enteros, y *p* es primo, es el hilo que une el Álgebra y la Geometría y da a la trama su sencilla significación. Esta obra de arte es accesible a cualquier estudiante que tenga los conocimientos del Álgebra corriente, pero las *Disquisitiones* no son recomendables a los principiantes. (La exposición concisa de Gauss ha sido modificada por autores posteriores, haciéndola así más fácilmente comprensible).
Algunas partes de esta obra habían sido ya resueltas por otros autores (Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, etc.), pero Gauss trató todo el problema desde su punto de vista individual, añadiendo mucho de su cosecha, y dedujo los resultados aislados de sus predecesores partiendo de las fórmulas y soluciones generales de los problemas más importantes. Por ejemplo, el bello resultado de Fermat de que todo número primo de la forma $4n + 1$ es una suma de dos cuadrados, y que tal suma tiene una sola forma, que Fermat demostró por su difícil método del "descenso infinito", se deduce naturalmente de la exposición general de las formas cuadráticas binarias, hecha por Gauss.
"Las *Disquisitiones Arithmeticae* han pasado a la historia", solía decir Gauss en sus últimos años, y tenía razón. Con la publicación de las *Disquisiciones* fue dada una nueva dirección a la Aritmética superior, y la teoría de números, que en los siglos XVII y XVIII había sido una variada agrupación de resultados especiales inconexos, adquirió consistencia, y ascendió a la dignidad de una ciencia matemática semejante al Algebra, al Análisis y a la Geometría.
La obra ha sido llamada un "libro de siete sellos". Su lectura es difícil hasta para los especialistas, pero los tesoros que contiene, y en parte oculta en sus concisas demostraciones sintéticas, son ahora accesibles a todo el que desee participar de ellos, gracias especialmente a los trabajos del amigo y

discípulo de Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien fue el primero que rompió los siete sellos.

Jueces competentes reconocieron la obra maestra inmediatamente. Parece que Legendre[3] hizo al principio escasa justicia a Gauss. Pero en el prefacio a la segunda edición de su tratado sobre la teoría de números (1808), que en gran parte fue desplazado por las *Disquisitiones,* se muestra entusiasta. Lagrange también lo alabó sin reservas. Escribiendo a Gauss el 31 de mayo de 1804, dice: "Vuestras *Disquisitiones os* han elevado rápidamente a la categoría de los primeros matemáticos, y considero que la última sección contiene el más bello descubrimiento analítico que ha sido hecho desde hace largo tiempo..., Creo, señor, que nadie aplaude más sinceramente vuestros triunfos que yo".

Debido a la clásica perfección de su estilo, las *Disquisitiones* eran de asimilación algo lenta, y cuando, al fin, algunos jóvenes de talento comenzaron a estudiar la obra profundamente, no pudieron adquirir ejemplares a consecuencia de la quiebra del editor. El mismo Eisenstein, discípulo favorito de Gauss, jamás tuvo un ejemplar. Dirichlet fue más afortunado. Su ejemplar le acompañó en todos sus viajes, y dormía colocándolo bajo su almohada. Antes de acostarse luchaba con algún párrafo difícil, abrigando la esperanza, frecuentemente cumplida, de que al despertarse durante la noche y volver a leerlo, podría interpretarlo. Se debe a Dirichlet el maravilloso teorema mencionado al ocuparnos de Fermat de que toda progresión aritmética

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, \ldots,$$

en la cual a, b son números enteros que no tienen ningún divisor común mayor que 1, contiene infinitos números primos. Esto fue probado por el Análisis, cosa milagrosa, pues el teorema se refiere a números enteros, mientras que el Análisis se ocupa de lo continuo, lo *no-entero*.

Dirichlet hizo en Matemática algo más que amplificar las Disquis*itiones,* pero no tenemos espacio para exponer su vida. Por desgracia, tampoco disponemos de espacio para Eisenstein, uno de los jóvenes más brillantes de los primeros años del siglo XIX, de quien se dice que Gauss afirmó: "Ha habido tres matemáticos que marcan épocas. Arquímedes, Newton y Eisenstein". Si Gauss dijo esto alguna vez (es imposible comprobarlo), seguramente merece que se le tenga en cuenta, pues Gauss era hombre que no hablaba con ligereza.

Antes de dar por terminado este campo de actividades de Gauss, podemos preguntarnos por qué jamás se dedicó al último teorema de Fermat. El mismo nos da la respuesta. La Academia de París propuso, en 1816, como premio para el período 1816-18, la prueba (o la negación) del teorema. El 7 de marzo de 1816 Olbers, desde Bremen, incitó a Gauss a presentarse: "Me parece justo, querido Gauss, que os ocupéis, de ello"; pero el "querido Gauss" resistió a la tentación. Al contestar, dos meses más tarde, expuso su opinión acerca del último teorema de Fermat. "Os estoy muy obligado por vuestras noticias respecto al premio en París pero confieso que el teorema de Fermat como proposición aislada tiene muy escaso interés para mí, pues fácilmente puedo encontrar una multitud de proposiciones semejantes que no es posible probar ni desechar".

Gauss sigue diciendo que la cuestión le ha llevado a recordar algunas de sus viejas ideas que tienen aplicación en la Aritmética superior. Sin duda se refiere a la teoría de los números algebraicos (aludida

---

[3] Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Consideraciones de espacio nos impiden ocuparnos de su vida. Gran parte de su obra ha sido absorbida o elaborada por matemáticos más jóvenes.

en capítulos anteriores), que Kummer, Dedekind y Kronecker desarrollaron independientemente. Pero la teoría en que Gauss pensaba es una de esas cosas, según declara, donde es imposible prever qué progresos se harán hacia una meta distante, que sólo se aprecia confusamente a través de la oscuridad. Para triunfar en una tarea tan difícil era necesario ser guiado por una buena estrella, y las circunstancias en que entonces se hallaba Gauss, con sus numerosas ocupaciones, no eran tan adecuadas para meditaciones de ese estilo, como lo habían sido "en los afortunados años 1796-1798, cuando estableció los puntos principales de las *Disquisitiones Arithmeticae*. Aun estoy convencido de que si soy tan feliz como espero, y consigo dar algunos de los pasos principales en esa teoría, el teorema de Fermat aparecerá tan sólo como uno de los corolarios menos interesantes".

Probablemente, todos los matemáticos lamentarán actualmente que Gauss se desviara de su camino a través de la oscuridad, por "un par de masas de polvo que llamamos planetas", según sus propias palabras, que brillaron inesperadamente en el firmamento de la noche y le extraviaron. Matemáticos de menos categoría que Gauss, por ejemplo Laplace- pudieron haber hecho todo lo que Gauss hizo en el cálculo de las órbitas de Ceres y Pallas, no obstante tratarse de Newton, pertenecía a los más difíciles de la astronomía matemática. Pero el brillante triunfo de Gauss en estas cuestiones, le llevaron a ser considerado inmediatamente como el primer matemático de Europa, proporcionándole una posición cómoda, donde pudo trabajar en relativa paz. Esas masas arrugadas de polvo fueron, por tanto, sus estrellas felices.

La segunda gran fase de la carrera de Gauss comienza el primer día del siglo XIX, día que debe recordarse con letra roja en la historia de la filosofía y de la astronomía. Desde que en 1781 Sir William Herschel (1738-1822), descubrió el planeta Urano, elevando el número de planetas conocidos hasta siete, número satisfactorio filosóficamente, los astrónomos habían estado buscando activamente otros miembros de la familia solar, cuya existencia era esperable según la ley de Bode, entre las órbitas de Marte y Júpiter. La busca no fue fructífera hasta que Giuseppe Piazzi (1746-1826), de Palermo en el primer día del siglo XIX, observó lo que al principio consideró erróneamente como un pequeño cometa que se acercaba al Sol, pero que luego fue reconocido como un nuevo planeta, más tarde llamado Ceres, el primero del enjambre de planetas menores en la actualidad conocidos.

Por una de las más irónicas sentencias pronunciadas por el destino cuando litiga el hecho frente a la especulación, el descubrimiento de Ceres coincidió con la publicación, por parte del famoso filósofo Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), de un sarcástico ataque a los astrónomos por dedicarse a buscar un octavo planeta. Si prestaran alguna atención a la filosofía, afirmaba Hegel, podrían darse cuenta inmediatamente de que debe haber precisamente siete planetas, ni más ni menos. Su búsqueda, por tanto, era una estúpida pérdida de tiempo. Sin duda, este ligero error de Hegel ha sido satisfactoriamente explicado por sus discípulos, pero nada han dicho de los centenares de planetas menores que se burlaron de su edicto joviano.

Tiene interés mencionar en este lugar el pensamiento de Gauss respecto a los filósofos que se mezclan en los problemas científicos sin comprenderlos. Se refería en particular a los filósofos que invaden los fundamentos de la Matemática sin haberse dedicado a ningún problema matemático. En cambio, Bertrand A. W. Russell (1872-1872), Alfred North Whitehead (1861-1861) y David Hilbert (1862-1942), en nuestra propia época, han hecho notables contribuciones a la filosofía de la Matemática, pero estos hombres son matemáticos.

Escribiendo a su amigo Schumacher el 1° de noviembre de 1844 Gauss dice: "Veréis las mismas cosas [incompetencia matemática] en los filósofos contemporáneos Schelling, Hegel, Nees Essenbeck y sus continuadores. ¿No os ponen los pelos de punta con sus definiciones? Leed en la historia de la filosofía antigua lo que los hombres cumbres de aquella época, Platón y otros (exceptúo a Aristóteles), dan, en forma de explicaciones. Pero hasta en el caso de Kant no ocurre lo mismo. En mi opinión, su distinción entre proposiciones analíticas y sintéticas es una de esas cosas que o son una trivialidad o son falsas". Cuando escribía estas palabras (1844), hacía ya tiempo que Gauss estaba en completa posesión de una Geometría no euclidiana, suficiente refutación a algunas de las cosas que Kant decía acerca del espacio y de la Geometría, y podía haber sido más despectivo.

No debe deducirse de este ejemplo aislado referente a la técnica matemática pura que Gauss no apreciara la filosofía. Todos los progresos filosóficos le llenaban de entusiasmo, aunque muchas veces desaprobara los medios en cuya virtud habían sido logrados. "Son problemas, decía una vez, cuya solución me parece de mucho mayor importancia que la de los problemas matemáticos; por ejemplo, los que se refieren a la ética, a nuestra relación con Dios, o a nuestro destino y nuestro futuro; pero su solución se halla más allá de nosotros, y completamente fuera de los límites de la ciencia.

Ceres constituyó un desastre para la Matemática. Para comprender por qué este problema fue considerado tan seriamente por Gauss, debemos recordar que la colosal figura de Newton, muerto hacía 70 años, aun proyectaba su sombra sobre la Matemática en 1801. Los "grandes" matemáticos de la época estaban dedicados, como ocurría con Laplace, a completar el edificio newtoniano de la mecánica celeste. La Matemática se hallaba aún confundida con la física matemática y la astronomía matemática. La visión de la Matemática como una ciencia autónoma, que Arquímedes tuvo en el siglo III antes de Jesucristo, se había desvanecido en el esplendor de Newton, y sólo el joven Gauss pudo recobrarla. Pero esa insignificante masa de polvo, el pequeño planeta Ceres, sedujo su talento sin paralelo cuando tenía 24 años y atravesaba aceleradamente por aquel desierto, que había de ser luego el imperio de la Matemática moderna.

Ceres no es el único culpable. Las magníficas dotes para la Aritmética mental puestas de manifiesto en las *Disquisitiones Arithmeticae*, desempeñaron también un papel fatal en la tragedia. Sus amigos **y** su padre estaban demasiado impacientes con el joven Gauss, al no encontrar éste una posición lucrativa. El Duque había hecho posible su educación, y ni siquiera conocía la naturaleza de la obra que había hecho de este hombre un solitario silencioso. Ahora, en el alborear del nuevo siglo, se presentaba la oportunidad para Gauss.

Había sido descubierto un nuevo planeta en una posición que hacía extraordinariamente difícil observarlo. Calcular su órbita partiendo de los escasos datos disponibles, era una tarea a la que podía haberse dedicado el propio Laplace. Newton declaró que tales problemas se contaban entre los más difíciles de la astronomía matemática. La simple Aritmética necesaria para establecer con seguridad suficiente una órbita que permitiera hallar a Ceres en su recorrido alrededor del Sol, no hay duda de que habría destrozado las máquinas de calcular actualmente empleadas; pero para aquel joven cuya memoria sobrehumana le permitía pasarse sin la tabla de logaritmos cuando tenía prisa o cuando su pereza no le dejaba buscarla, toda esta interminable Aritmética, *logística, no aritmética*, era un juego de niños.

¿Por qué no entregarse a su vicio favorito? Calcular como jamás se había calculado antes, encontrar la difícil órbita para deleite y admiración de los dictadores de la moda matemática, y hacer posible en cualquier momento, a los pacientes astrónomos, el descubrimiento de Ceres en el lugar donde la ley newtoniana de la gravitación decretaba que debía encontrarse, si la ley era, en efecto, una ley natural. ¿Por qué no dedicarse a esta tarea, volviendo la espalda a la visión insustancial de Arquímedes, y olvidando sus descubrimientos jamás superados, que esperaban su desarrollo en las páginas de su diario? ¿Por qué no ser popular? La generosidad del Duque había herido el orgullo del joven en su lugar más secreto; el honor, el reconocimiento, el ser considerado como un "gran" matemático a la manera de la época con su probable secuela de independencia económica. Todo esto se encontraba ahora a su alcance. Gauss, el dios matemático de todas las épocas, podía alargar su mano para recoger los frutos de una fama fácil en su propia generación.

Los sublimes sueños, cuyos fugitivos destellos había recogido durante 20 años el joven Gauss en su diario, iban siendo olvidados. Ceres se iba encontrando precisamente donde el maravilloso ingenio y los detallados cálculos del joven Gauss habían predicho. Pallas, Vesta y Juno, insignificantes planetas hermanos del diminuto Ceres, eran rápidamente observados por los telescopios desafiando a Hegel, y sus órbitas correspondían a los cálculos correctos de Gauss. Los cálculos que Euler habría tardado tres días en realizar -se ha dicho que uno de ellos fue la causa de su ceguera- eran ahora simples ejercicios de escasas horas. Gauss prescribió el *método*, la rutina. La mayor parte de su tiempo, durante casi 20 años, fue dedicada a los cálculos astronómicos.

Pero esta labor sin brillo no esterilizó el genio creador de Gauss. En 1809 publicó su segunda obra maestra *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol siguiendo secciones cónicas) donde hace una exposición detenida de la determinación de las órbitas planetarias y cometarias basándose en los datos de observación, abarcando el difícil análisis de las perturbaciones y estableciendo la ley que durante muchos años habría de dominar en los cálculos astronómicos y en la astronomía práctica. Era una gran obra, pero no tan grande como la que Gauss hubiera sido capaz de realizar siguiendo las anotaciones olvidadas en su diario. La *Theoria motus* no añadió ningún descubrimiento esencial a la *Matemática*.

El reconocimiento del valor de Gauss tuvo lugar con rapidez espectacular después del redescubrimiento de Ceres, y Laplace consideró al joven matemático a la par de él o quizá superior. Algún tiempo más tarde, cuando el Barón Alexander von Humboldt (1769-1859), famoso viajero y amante de las ciencias, preguntó a Laplace quién era el matemático más grande de Alemania, Laplace replicó: "Pfaff ". “Y Gauss?", preguntó asombrado von Humboldt, quien apoyaba a éste para el cargo de Director del Observatorio de Göttingen. "Oh, dijo Laplace, Gauss es el matemático más grande del mundo".

La década siguiente al episodio de Ceres fue rica en venturas y desventuras para Gauss. No careció de detractores, ni siquiera en la primera fase de su carrera. Hombres eminentes ridiculizaron al joven de veinticuatro años por emplear su tiempo en una labor tan inútil como el cálculo de la órbita de un planeta menor. Ceres podía ser la diosa de los campos, pero era indudable que ni un solo grano del cereal que creciera en el nuevo planeta podría venderse en el mercado de Brunswick en la tarde de un sábado. Sin duda tenían razón, pero también le ridiculizaron en la misma forma, treinta años después, cuando estableció los fundamentos de la teoría matemática del electromagnetismo, e inventó el telégrafo eléctrico. Gauss les dejó que se divirtieran con sus burlas, jamás les replicó públicamente, pero en privado se lamentaba que hombres honrados y sacerdotes de la ciencia pudieran ser tan mezquinos. Mientras tanto, continuaba su labor, agradecido a los honores que las sociedades doctas de Europa le dispensaban, pero sin desviarse de su camino.

El Duque de Brunswick aumentó la pensión concedida al joven, haciendo posible su matrimonio (9 de octubre de 1805), cuando tenía veintiocho años, con Juana Osthof, de Brunswick. Escribiendo a su antiguo amigo universitario Wolfgang Bolyai, tres días después de su compromiso, Gauss expresaba su increíble felicidad. "La vida se alza aún ante mí como una eterna primavera, con nuevos y brillantes colores".

De este matrimonio nacieron tres hijos: José, Minna y Luis, el primero de los cuales parece que heredó el talento de su padre para los cálculos mentales. Juana murió el 11 de octubre de 1809, después del nacimiento de Luis, dejando desolado a su joven marido. Su eterna primavera se transformaba en invierno. Aunque volvió a casarse al año siguiente (4 de agosto de 1810), para el bien de sus hijos pequeños, tuvo que pasar mucho tiempo, antes de que Gauss pudiera hablar sin emoción de su primera esposa. Con la segunda mujer, Minna Waldeck, que había sido íntima amiga de la primera, tuvo dos hijos y una hija.

Se cuenta que Gauss no estuvo en buenas relaciones con sus hijos, salvo posiblemente con el inteligente José, que jamás dio a su padre motivo de disgusto. Se afirma que dos de ellos abandonaron el hogar y marcharon a los Estados Unidos. De uno de estos hijos se dice que dejó numerosos descendientes que aún viven en América, pero es imposible añadir algún dato más, salvo que uno de los hijos americanos fue un próspero comerciante en San Luis y que los dos primeros fueron granjeros en Missouri. Con sus hijas, Gauss fue siempre feliz. También se cuenta la leyenda opuesta (garantizada por ancianos cuyo recuerdo de la familia Gauss puede ser considerado como digna de creerse). Dícese que Gauss siempre fue cariñoso con sus hijos, aunque algunos de ellos fueron más bien bruscos y le causaron infinitas angustias. Se puede pensar que el recuerdo de su propio padre tuvo que hacer benévolo a Gauss en el trato con sus hijos.

En 1808 Gauss perdió a su padre, y dos años antes había sufrido una pérdida aún mayor, al morir su protector en circunstancias trágicas.

El Duque Ferdinando no sólo fue un inteligente protector de los jóvenes de talento, y un cordial gobernante, sino también un soldado a quien Federico el Grande estimó mucho por su bravura y genio militar durante la guerra de los 7 años (1756-1763).

Teniendo 70 años, Ferdinando fue nombrado jefe de las fuerzas prusianas, en un desesperado intento para detener a los franceses mandados por Napoleón, después de fracasar la misión del Duque en San Petersburgo, al no poder conseguir la ayuda de Rusia para Alemania. La batalla de Austerlitz (2 de diciembre de 1805) había pasado a la historia, y Prusia se encontraba frente a las fuerzas invasoras. Ferdinando enfrentó a los franceses en su marcha hacia el Saale, en Auerstedt y Jena, siendo desastrosamente derrotado y mortalmente herido. Entonces volvió a su hogar. Napoleón el Grande subía a la escena con su panzuda grandeza. En la época de la derrota de Ferdinando, Napoleón tenía su cuartel general en Halle. Una delegación de Brunswick esperaba al victorioso emperador de todos los franceses para implorar su generosidad en favor del valiente anciano a quien había derrotado. ¿Dejaría a un lado el poderoso emperador la etiqueta militar y permitiría morir en paz a su enemigo caído? El duque, según aseguraban, ya no era peligroso. Estaba moribundo.

Napoleón se hallaba en una mala época, víctima de uno de sus berrinches femeninos. No sólo se negó a la gracia, sino que hizo gala de una brutalidad vulgar e innecesaria. Revelando lo que realmente era, Napoleón subrayó su negativa con una estúpida difamación de su honroso enemigo, cuya capacidad como soldado ridiculizó de un modo histérico. La humillada delegación nada podía hacer para salvar al anciano de la muerte en prisión. No es, pues, sorprendente que estos mismos alemanes, nueve años más tarde, acudieran a iguales métodos en Waterloo, y ayudaran a cavar la fosa del emperador de los franceses.

Gauss vivía, en Brunswick, en aquella época, y su casa se alzaba en la calle principal. Una mañana de los últimos meses de otoño vio pasar ante sus balcones una ambulancia que se alejaba. En ella yacía el duque moribundo para huir a Altona. Con una emoción demasiado profunda para ser expresada en palabras, Gauss contempló la huida de aquel hombre, que había hecho por él más que su padre, para morir oculto como si fuera un criminal perseguido. Nada dijo entonces, ni tampoco más tarde, pero sus amigos se dieron cuenta de que su reserva se hizo mayor, y su continente siempre serio adquirió mayor gravedad. Como Descartes en sus primeros años, Gauss sentía horror a la muerte, y toda su vida se vio atormentada por este angustioso temor. Gauss tenía demasiada vitalidad para morir, o para ser testigo de la muerte. El duque murió en la casa de sus mayores en Altona, el 10 de noviembre de 1806.
Muerto su generoso protector, Gauss necesitó encontrar algún medio para mantener a su familia. No era difícil, pues, la fama del joven matemático había llegado hasta los más lejanos rincones de Europa. San Petersburgo deseaba que fuera el sucesor lógico de Euler, que jamás había sido dignamente reemplazado desde que murió en 1783. En 1807 Gauss recibió un ofrecimiento halagador. Alexander von Humboldt y otros amigos influyentes, deseosos de que Alemania no perdiera al más grande matemático del mundo, consiguieron que Gauss fuera nombrado director del Observatorio de Göttingen, con el privilegio -y deber cuando era necesario- de explicar Matemática a los estudiantes universitarios.

No hay duda de que Gauss hubiera podido obtener una cátedra de Matemática, pero prefirió el Observatorio, que le ofrecía mejores perspectivas para la investigación ininterrumpida. Aunque sería demasiado fuerte decir que Gauss odiaba la enseñanza, la instrucción de los estudiantes comunes no le producía placer alguno, y tan sólo cuando algún gran matemático buscaba sus enseñanzas, Gauss, sentado alrededor de una mesa con sus discípulos revelaba los secretos de sus métodos en sus lecciones perfectamente preparadas. Pero tales incentivos eran por desgracia raros, y la mayor parte de los jóvenes que consumían el tiempo impagable de Gauss, hubieran podido dedicarse mejor a cualquier otra cosa que no fuera la Matemática. Escribiendo en 1810 a su íntimo amigo el astrónomo y matemático Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), Gauss dice, "Este invierno estoy dando dos cursos de conferencias a tres estudiantes, de los cuales uno está regularmente preparado, el otro menos que regularmente, y el tercero carece de preparación y capacidad. Tales son las cargas de una cátedra de Matemática".

El sueldo que Göttingen podía pagar a Gauss en aquella época, los franceses se dedicaban al saqueo de Alemania para poder proporcionar un buen gobierno a los germanos, era modesto, aunque suficiente dadas las pocas necesidades de Gauss y su familia. Los lujos jamás atrajeron al Príncipe de los matemáticos, cuya vida había sido siempre dedicada a la ciencia desde antes de cumplir los veinte años. Como decía su amigo Sartorius von Waltershausen, "Gauss fue sencillo y sin afectación desde su juventud hasta el día de su muerte. Un pequeño estudio, una mesita de trabajo con un tapete verde, un pupitre pintado de blanco, un estrecho sofá, y, después de cumplir los 70 años, un sillón, una lámpara con pantalla, una alcoba fresca, alimentos sencillos, un batón y un gorro de terciopelo eran todas sus necesidades".

Si Gauss era sencillo y económico, los franceses invasores de Alemania en 1807 eran más sencillos y económicos. Para gobernar a Alemania de acuerdo con sus ideas, los vencedores de Auerstedt y Jena multaron a los vencidos con cantidades mayores de las que podían tolerar. Como profesor y astrónomo de Göttingen, Gauss fue obligado a pagar una contribución involuntaria de 2.000 francos para sostener los gastos de las guerras napoleónicas. Esta exorbitante suma era superior a la capacidad económica de Gauss.

Gauss recibió una carta de su amigo el astrónomo Olbers enviándole el importe de la multa, y expresando su indignación por el hecho de que un estudioso se viera sometido a una extorsión tan mezquina. Pero Gauss, agradeciendo a su generoso amigo el rasgo, devolvió el dinero al amable dador. No todos los franceses eran tan económicos como Napoleón. Poco después de que Gauss devolviese a Olbers el dinero, recibió una breve y amistosa nota de Laplace comunicándole que el famoso matemático francés había pagado la multa de los 2.000 francos impuesto al matemático más grande del mundo, y que consideraba como un honor haber podido eliminar esa inmerecida carga de los hombros de su amigo. Como Laplace había pagado la multa en París, Gauss no pudo devolverle el dinero. De todos modos, se negó a aceptar la ayuda de Laplace. Un suceso inesperado y no buscado le capacitó para devolver a Laplace su dinero con intereses, en un plazo muy rápido. Aunque era sabido que Gauss se había negado a ser ayudado económicamente el siguiente ensayo no fracasó. Un admirador de Francfort le envió anónimamente 1000 florines. Como Gauss ignoraba quien era el donante, se vio forzado a aceptar el regalo.

La muerte de su amigo Ferdinando, el precario estado de Alemania bajo el gobierno de los franceses, las aflicciones económicas y la pérdida de su primera mujer alteraron la salud de Gauss, haciendo desgraciada su vida cuando apenas había cumplido treinta años. Una predisposición constitucional a la hipocondría agravada por el incesante exceso de trabajo intervino de un modo esencial. Pero jamás participó sus desventuras a sus amigos, con quien siempre estuvo en una tranquila correspondencia, y sólo confesó desdichas en uno de sus manuscritos matemáticos íntimos. Después de su nombramiento como director del Observatorio de Göttingen, en 1807, Gauss recurrió algunas veces, durante los 3 años siguientes, a su diario, para hacer geniales anotaciones. En un manuscrito sobre las funciones elípticas, las cuestiones puramente científicas son repentinamente interrumpidas por estas palabras: "La muerte me sería más querida que esta vida". El trabajo constituyó su medicina.

Los años 1811-12 (Gauss tenía 34 años en 1811) fueron mejores. Con una mujer que podía cuidar a sus hijos pequeños, Gauss comenzó a disfrutar de cierta paz. Por entonces, casi exactamente un año después de su segundo matrimonio, el gran cometa de 1811 fue observado por Gauss en el crepúsculo del día 22 de agosto. Era una tarea digna de él esgrimir las armas que había inventado para sojuzgar a los planetas menores.

Tales armas resultaron adecuadas. Mientras las gentes supersticiosas de Europa seguían el imponente espectáculo con ojos de avestruz, contemplando al cometa flamear su cimitarra al aproximarse al Sol y viendo en la ígnea hoja la advertencia de los cielos de que el rey de los reyes estaba enojado con Napoleón y harto de la cruel tiranía, Gauss tuvo la satisfacción de comprobar que el cometa seguía el camino que había calculado rigurosamente hasta el último decimal. El siguiente año, los incrédulos vieron también comprobada otra de sus predicciones con el incendio de Moscú y la destrucción del ejército de Napoleón en las llanuras heladas de Rusia.

Este es uno de los raros ejemplos donde la explicación popular está de acuerdo con los hechos, y conduce a consecuencias más importantes que las científicas. El mismo Napoleón era una persona altamente crédula que reconciliaba sus carnicerías con una fe infantil en una Providencia inescrutable, creyendo ser un Hombre del Destino. Es probable que el espectáculo celeste de un innocuo cometa, que paseaba su cola por el cielo, dejara su impresión en el subconsciente de un hombre como Napoleón, alterando su juicio. La reverencia casi supersticiosa de ese hombre para la Matemática y los matemáticos no beneficia a nadie, aunque ha sido frecuentemente citada como una de las principales justificaciones para ambos.

Aparte de la tosca apreciación del valor de la Matemática en las cuestiones militares, donde su utilidad puede ser apreciada hasta por un idiota ciego, Napoleón no tenía el menor concepto de lo que era la Matemática a que se dedicaban sus grandes contemporáneos Lagrange, Laplace y Gauss. Después de haber estudiado en el colegio la Matemática elemental, Napoleón se dirigió demasiado pronto hacia otras cosas, y sus conocimientos matemáticos nunca fueron profundos. Aunque parece increíble que un hombre de la capacidad demostrada por Napoleón pudiera subestimar tan groseramente las dificultades inherentes a cuestiones que estaban más allá de su comprensión, basta recordar el hecho de que tuvo la risible audacia de asegurar al autor de la *Mécanique céleste* que leería su libro el primer mes que tuviera libre. Newton y Gauss podían haber realizado esa proeza, pero Napoleón sólo hubiera sido capaz de hojear la obra sin fatigarse demasiado.

Constituye una satisfacción recordar que Gauss era demasiado orgulloso para prostituir la ciencia ante Napoleón el Grande, halagando la vanidad del Emperador al solicitarle, en nombre de su notorio respeto para la Matemática, le perdonara la multa de 2.000 francos, según le habían aconsejado algunos de sus amigos. Seguramente, Napoleón se hubiera sentido clemente. Pero Gauss no podía olvidar la muerte de Ferdinando, y creía que tanto él como la Matemática podrían arreglárselas sin la condescendencia de Napoleón.

Ningún contraste más notable entre el genio matemático y el genio militar que el proporcionado por sus actitudes respectivas ante el enemigo caído. Ya hemos visto cómo Napoleón trató a Ferdinando. Cuando Napoleón cayó, Gauss no exteriorizó su alegría. Tranquilamente, y con el mayor desinterés, leyó cuanto pudo encontrar acerca de la vida de Napoleón, e hizo cuanto pudo para comprender las acciones de un hombre como el Emperador francés. Este esfuerzo le sirvió de diversión. Gauss tenía un agudo sentido del humor, y el notable realismo que heredó de sus antepasados campesinos habrán incitado su sonrisa ante los hechos heroicos.

El año 1811 pudo haber sido un jalón en la Matemática comparable a 1801 -el año en que aparecieron las *Disquisitiones Arithmeticae- si* Gauss hubiera hecho público un descubrimiento que confió a Bessel. Habiendo definido los números complejos y su representación geométrica como puntos del plano de la Geometría analítica, Gauss se propuso investigar lo que actualmente se llaman *funciones analíticas* de variable compleja.

El número complejo $x + iy$, donde i designa $\sqrt{-1}$, representa el punto (x,y). Para abreviar $x + iy$ será denotado por la letra z. Cuando x, y tornan independientemente valores reales de cualquier manera, el punto z *se* mueve sobre el plano, pero no al azar, sino en una forma determinada por aquella en que x, y asumen sus valores. Cualquier expresión que contenga z, como z^2 o $1/z$, etc., que toma un valor definido *único* cuando se asigna un valor a z, se llama *función uniforme* de z. Denotaremos tal función por f(z). Por tanto, si $f(z)$ es la función particular z^2, de modo que aquí

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \text{ (porque } i^2 = 1)$$

es evidente que cuando se asigna un valor a z o sea $x + iy$, por ejemplo $x = 2$, $y = 3$, de manera que $z = 2 + 3i$, queda determinado precisamente un valor de $f(z)$; y entonces, para $z = 2 + 3i$, tendremos $z^2 = - 5 + 12i$.

No todas las funciones uniformes *f(z)* son estudiadas en la teoría de funciones de una variable compleja; las funciones *monógenas* quedan para un examen detenido. La razón de ello será expuesta después de que hayamos dicho lo que significa la palabra *monóqeno*.
Supongamos que *z* toma otra posición, es decir z'. La función *f(z)* toma otro valor *f(z')*, obtenido al sustituir *z* por *z'*. La *diferencia f(z') - f (z)* entre el nuevo y el antiguo valor de la función se divide ahora por la diferencia entre el nuevo y el antiguo valor de la variable, o sea [*f(z') - f(z)]/(z' - z)* y, precisamente como se ha hecho para calcular la inclinación de una gráfica al encontrar la derivada de la función que la gráfica representa, veremos que *z'* se aproxima a *z* indefinidamente, de modo que *f(z')* se aproxima a *f(z)* simultáneamente. Pero aquí aparece un nuevo y notable fenómeno.

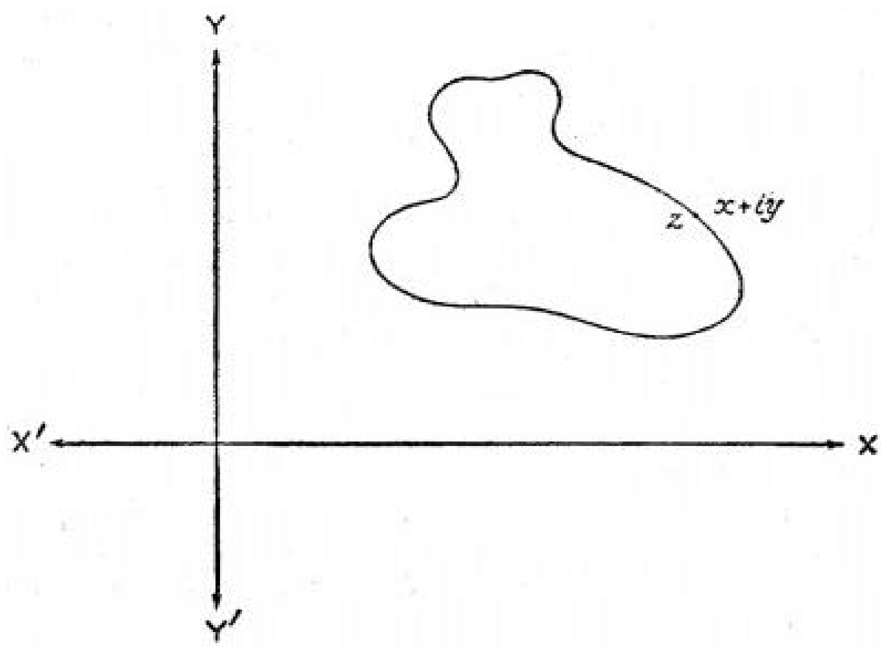


Figura 2

No existe aquí una única forma en la que *z'* pueda moverse hasta coincidir con *z*, pues *z'* puede moverse sobre todo el plano de los números complejos por uno cualquiera de los infinitos caminos, antes de coincidir con *z*. No podemos esperar que el valor límite de *[f (z') - f (z)]/(z'- z)* cuando z' coincide con *z* sea *el mismo* para *todos* esos caminos, y en general *no* lo es. Pero si *f(z)* es tal, que el valor límite justamente descrito es el mismo para *todos* los caminos por los que z' se mueve en coincidencia con *z*, entonces se dice que *f(z)* será monógena en z (o en el punto que represente z). La uniformidad (anteriormente descripta) y la *monogeneidad* son rasgos distintivos de las funciones ana*líticas* de una variable compleja.
Es posible formarse cierta idea de la importancia de las funciones analíticas teniendo en cuenta el hecho de que amplios campos de las teorías del movimiento de los fluidos (también de la electricidad matemática y de la representación de mapas que no deforman ángulos) son tratados naturalmente por la teoría de las funciones *analíticas* de una variable compleja. Supongamos que tal función *f(z)* se descompone en su parte "real" (aquella que no contiene la "unidad imaginaria" *i)* y en su parte "imaginaria", o sea *f(z)* = U + *i*V. Para la función analítica especial z^2 tenemos U = $x^2 - y^2$, V = $2xy$.
Imaginemos una película de un líquido que se extiende sobre un plano. Si el movimiento del líquido se

realiza sin remolinos, se obtiene una línea del movimiento basada en alguna función analítica *f(z)*, trazando la curva U = *a*, en la cual *a* es un número real, e igualmente se pueden obtener las líneas equipotenciales partiendo de V = *b* (siendo *b* un número real). Haciendo variar *a* y *b*, tendremos una imagen completa del movimiento para un área tan grande como deseemos. Para una situación dada, la de un líquido que fluye alrededor de un obstáculo, la parte difícil del problema es encontrar qué función analítica hay que elegir, y toda la cuestión ha experimentado grandes retrocesos: han sido investigadas las funciones analíticas simples y se han buscado los problemas físicos a que se ajustan. Es curioso que muchos de estos problemas artificialmente preparados hayan prestado grandes servicios en la aerodinámica, y en otras aplicaciones prácticas de la teoría del movimiento de los fluidos.

La teoría de las funciones analíticas de una variable compleja ha sido uno de los campos de los grandes triunfos matemáticos del siglo XIX. Gauss en su carta a Bessel expone el interés de su vasta teoría para el teorema fundamental, pero sus hallazgos fueron olvidados hasta que Cauchy y más tarde Weierstrass hicieron el redescubrimiento. Como esto constituye un jalón en la historia del Análisis matemático haremos una breve descripción, omitiendo todos los detalles que serían necesarios para establecer una fórmula exacta.

Si imaginamos la variable compleja *z* describiendo una curva cerrada de longitud finita sin ondas o rizos, tenemos un concepto intuitivo de lo que queremos decir al hablar de "longitud" de un trozo de esta curva.

Marquemos *n* puntos $P_1, P_2 \ldots, P_n$ sobre la curva, de modo que cada uno de los segmentos $P_1,P_2,P_2P_3,P_3P_4,\ldots,P_nP_1$ no sea mayor que una longitud finita *l* fijada de antemano. Sobre cada uno de estos segmentos elegir un punto, que no sea uno de sus extremos; hallar el valor de *f(z)* para el valor de *z* que corresponde al punto, y multiplicar este valor por la longitud del segmento en que está el punto; hacer lo mismo para *todos* los segmentos, y sumar los resultados. Finalmente, tomar el valor límite de esta suma a medida que el número de segmentos aumenta indefinidamente. Esto da la *"línea integral" de f(z)* para la curva.

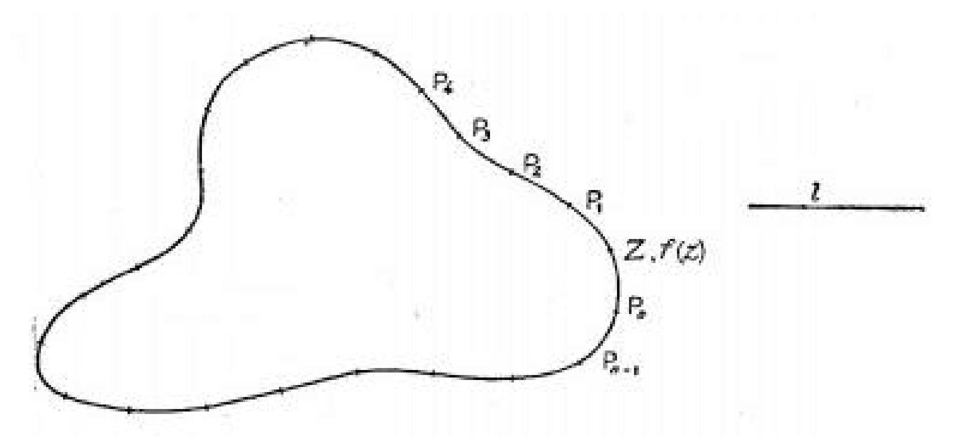


Figura 3.

¿Cuándo será cero esta línea integral? Para que la línea integral sea cero es suficiente que *f(z)* sea *analítica* (uniforme y monógena) en cualquier punto *z* sobre la curva y en el interior de la curva.

Este es el gran teorema que Gauss comunicó a Bessel en 1811, y que, con otro teorema de tipo similar, en las manos de Cauchy que lo redescubrió independientemente, iba a tener como corolarios muchos de los importantes resultados del Análisis.

La astronomía no absorbió todas las prodigiosas energías de Gauss en esta época. El año 1812, cuando el gran ejército de Napoleón libraba una desesperada acción defensiva en las llanuras heladas, fue testigo de la publicación de otra gran obra de Gauss, la de las *series hipergeométricas*

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1*2}+...,$$

en la que los puntos significan que la serie continúa indefinidamente de acuerdo con la ley indicada. El término siguiente es

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}*\frac{x^3}{1*2*3}$$

Esta memoria constituye otro jalón. Como ya hemos dicho, Gauss fue el primero de los rigoristas modernos. En esta obra determinó las restricciones que hay que imponer a los números a, b, c, x, para que las series converjan (en el sentido explicado al principio de este capitulo). Las series, por sí mismas no constituyen un ejercicio que sirva para aumento en habilidad en las manipulaciones analíticas y que luego pueda ser olvidado. Abarca como casos especiales, obtenidos asignando valores específicos a uno o más de los a, b, c, x, muchas de las más importantes series en el Análisis, por ejemplo aquellas mediante las cuales los logaritmos, las funciones trigonométricas y varias de las funciones que aparecen repetidamente en la astronomía newtoniana y en la física matemática son calculadas y ordenadas en tablas. El teorema general del binomio es también un caso especial. Valiéndose de estas series en su forma general, Gauss mató varios pájaros de un tiro. De esta obra se han desarrollado muchas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de la física el siglo XIX.

La elección de estas investigaciones para realizar un serio esfuerzo es característica de Gauss. Jamás publicó cosas triviales. Cuando planteaba alguna cuestión, no sólo la dejaba terminada sino también repleta de nuevas ideas, de tal modo que sus sucesores podían aplicar lo que Gauss inventó a nuevos problemas. Aunque las limitaciones del espacio nos impide la exposición de los muchos ejemplos de este carácter fundamental de las contribuciones de Gauss a la Matemática pura, no podemos, aunque se trate de un breve resumen, pasar en silencio su obra sobre la ley de reciprocidad bicuadrática. Su importancia radica en que dio una nueva y totalmente imprevista dirección a la Aritmética superior.

Valiéndose de la reciprocidad *cuadrática* (segundo grado) era natural que Gauss considerara la cuestión general de las congruencias binómicas de cualquier grado. Si m es un número entero no divisible por el primo p, y si n es un número entero positivo, y si además puede encontrarse un número x tal que $x^n \equiv m$ (mód p), m se denomina un *resto n - ic* de p; cuando $n = 4$, m es un *resto bicuadrático* de p.

El caso de las congruencias binomias *cuadráticas* ($n = 2$) poco sugiere cuando n es superior a 2. Una de las cuestiones que Gauss debía haber incluido en la eliminada sección octava (o posiblemente, como dice Sophie Germain, en el proyectado pero inacabado segundo volumen) de las *Disquisitiones*

Arithmeticae era una exposición de estas congruencias superiores, y una búsqueda de las leyes correspondientes de reciprocidad, o sea las interconexiones para la resolución o no resolución del par x^n º p (mód q), $x^n \equiv q$ (mód p), donde p, q son primos. En particular, los casos $n = 3$, $n = 4$ tenían que haber sido investigados.
La memoria de 1825 abre nuevos caminos con toda la audacia propia de los grandes precursores. Después de muchos falsos comienzos, que llevaron el problema a una complejidad intolerable, Gauss descubrió el camino "natural". Los números *racionales* enteros 1, 2, 3,... no son apropiados para el establecimiento de la ley de reciprocidad *bicuadrática*, como lo son para la cuadrática. Debía ser inventado una especie totalmente nueva de números enteros. Son los llamados en*teros complejos gaussianos*, y corresponden a todos los números complejos de la forma $a + bi$, en la que a, b son *enteros racionales* e i es el símbolo de $\sqrt{-1}$.
Para enunciar la ley de reciprocidad bicuadrática, es necesario una detenida discusión preliminar de las leyes de la divisibilidad aritmética de tales *complejos enteros*. Gauss lo hizo, y con ello inauguró la teoría de los números algebraicos, que probablemente tenía muy presente cuando emitió su opinión acerca del último teorema de Fermat. Para la reciprocidad cúbica ($n = 3$,) encontró también el camino exacto de una forma similar. Su trabajo sobre esta cuestión se encuentra en sus documentos póstumos.
La significación de este gran progreso se apreciará más claramente cuando estudiamos las obras de Kummer y Dedekind. Por el momento bastará decir que el discípulo favorito de Gauss, Eisenstein, se valió de la reciprocidad cúbica. Además, descubrió una asombrosa relación entre la ley de reciprocidad bicuadrática y ciertas partes de la teoría de funciones elípticas, en las que Gauss trabajó aunque no comunicó sus hallazgos.
Los *enteros* complejos gaussianos son, como es natural, una subclase de *todos los números* complejos, y podría suponerse que la teoría *algebraica de todos* los números daría lugar, como un detalle trivial, a la teoría *aritmética* de los *enteros* abarcados. Pero no es este el caso. Comparada con la teoría aritmética, la algebraica es infantilmente fácil. Los *números racionales* (números de la forma *a/b*, donde *a, b* son números naturales) quizá proporcionan una razón de por qué esto es así. Podemos *siempre* dividir un número racional por otro, y obtener *otro* número racional: *a/b* dividido por *c/d* proporciona el número racional *ad / bc*.
Pero un entero natural dividido por otro entero natural, no siempre es otro *entero* natural: 7 dividido por 8 da 7/8. Por tanto, si debemos limitarnos a *los enteros*, en caso de interés para la teoría de los números, tendríamos que ligar nuestras manos y nuestros pies antes de iniciar la partida. Esta es una de las razones por las cuales la Aritmética superior sea más difícil que el Álgebra, superior o elemental.
Gauss hizo también progresos igualmente significativos en Geometría, en las aplicaciones de la Matemática a la geodesia, en la teoría newtoniana de la atracción y en el electromagnetismo. ¿Cómo es posible que un hombre cumpliera esta colosal tarea de tan alto valor? Con característica modestia Gauss declara que "si otros reflexionaran sobre las verdades matemáticas tan profunda y continuamente como yo lo he hecho, realizarían mis descubrimientos". La explicación de Gauss recuerda la de Newton, quien al ser preguntado acerca de cómo había hecho descubrimientos astronómicos superiores a los de todos sus predecesores, replicó: "Pensando siempre en ellos". Esto sería sencillo para Newton, pero no lo es para cualquier otro mortal.
Parte del enigma de Gauss encuentra su respuesta en su *involuntaria* preocupación por las ideas matemáticas, lo que a su vez exige, como es natural, una explicación. ¿Cómo un hombre joven, como era Gauss, pudo ser "secuestrado" por la Matemática? Al conversar con los amigos quedaba

repentinamente silencioso e indiferente a todo, invadido por pensamientos que era incapaz de gobernar. Más tarde recobraba el control sobre sus pensamientos -o perdía su gobierno sobre ellos- y conscientemente dirigía todas sus energías a la solución de las dificultades hasta que quedaban vencidas. Planteado un problema, jamás lo abandonaba hasta haberle resuelto, aunque no era raro que varias cuestiones atrajeran su atención simultáneamente.

En uno de esos casos (Gauss lo refiere en las *Disquisitiones*, pág. 636) el gran matemático nos cuenta que durante cuatro años apenas pasó una semana en que no empleara algún tiempo intentando establecer si cierto signo debía ser más o menos. La solución apareció finalmente como un relámpago. Pero sería absurdo suponer que la hubiera podido encontrar sin haber empleado muchas horas intentando hallarla. Con frecuencia, después de haber trabajado infructuosamente durante semanas en algún problema, Gauss encontraba la solución clara después de haber pasado una noche de insomnio. La capacidad para concentrarse de un modo intenso y prolongado constituía parte de su secreto.

En esta capacidad para entregarse al mundo de sus propios pensamientos Gauss recuerda a Arquímedes y a Newton. En otros dos aspectos se halla también al par de ellos: sus dotes para la observación precisa y su capacidad para la invención científica que le permitió idear los instrumentos necesarios para sus investigaciones. La geodesia debe a Gauss la invención del heliotropo, un mecanismo ingenioso gracias al cual pueden ser transmitidas instantáneamente señales por medio de la luz reflejada. Para su época, el heliotropo constituía un gran progreso. Los instrumentos astronómicos que utilizó también fueron perfeccionados por Gauss. Para su empleo en las investigaciones fundamentales sobre el electromagnetismo, Gauss inventó el magnetómetro bifilar. Como un ejemplo final de su habilidad mecánica, puede recordarse que Gauss, en 1833, inventó el telégrafo eléctrico, y que él y su colaborador Wilhelm Weber (1804-1891), lo usaron para enviar mensajes. La combinación del genio matemático con la habilidad experimental es extraordinariamente rara en todas las ciencias.

Gauss se cuidó poco de la posible utilización práctica de sus invenciones. Como Arquímedes, prefería la Matemática a todas las otras cosas; otros podrían recoger los frutos tangibles de su labor. Pero Weber, su colaborador en las investigaciones electromagnéticas, vio claramente lo que el pequeño telégrafo de Göttingen significaba para la civilización. Recordaremos que el ferrocarril comenzó a usarse en los primeros meses del año 1830. "Cuando el globo terráqueo esté cubierto con una red de ferrocarriles y de alambres telegráficos, profetizaba Weber en 1835, esta red prestará servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano, en parte como un medio de transporte, en parte como un medio para la propagación de las ideas y sensaciones, con la rapidez de la luz".

Ya hemos hecho notar la admiración que Gauss tuvo por Newton. Conociendo los enormes esfuerzos que le costaron algunas de sus obras maestras, Gauss estaba en condiciones de apreciar el mérito de la meditación incesante en que tuvo que sumirse Newton para realizar su enorme obra. La historia de Newton y de la manzana provocaba la indignación de Gauss. "Necios, exclamaba, creed en esa historia si os place, pero la verdad es ésta. Un hombre oficioso y estúpido preguntó a Newton cómo había descubierto la ley de la gravitación. Viendo que era difícil tratar con un sujeto de mentalidad infantil, y deseando salir del paso, Newton respondió que una manzana al caer había chocado en su nariz. El hombre quedó completamente satisfecho y perfectamente convencido".

La historia de la manzana ha encontrado un eco en nuestros propios tiempos. Al ser importunado Einstein por la pregunta de cómo había llegado a su teoría del campo gravitatorio, el interrogado respondió que en una ocasión había preguntado a un obrero, que desde un andamio había caído en un montón de paja, acerca de si se había dado cuenta del tirón de la "fuerza" de la gravedad cuando caída.

Al saber que no había percibido ninguna fuerza, Einstein vio inmediatamente que la "gravitación" en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo, puede ser reemplazada por una aceleración del sistema de referencia del observador (el obrero que cayó). Probablemente, esta historia es también completamente falsa. Einstein forjó su idea después de una pesada labor, que consumió varios años de su existencia, para dominar el cálculo sensorial de los matemáticos italianos, Ricci y Levi-Civita, discípulos de Riemann y Christoffel, los cuales a su vez, se habían inspirado en la obra geométrica de Gauss.

Al hablar de Arquímedes, para quien tenía una admiración sin límites, Gauss observaba que no podía comprender cómo Arquímedes no llegó a inventar el sistema decimal de numeración o su equivalente (con alguna base diferente de 10). La obra de Arquímedes, no propia de un griego, al idear un esquema de escritura y de cálculo numérico más allá de la capacidad del simbolismo griego, puso, según Gauss, en las manos de Arquímedes la notación decimal, con su principio importantísimo de posición ($325 = 3 * 10^2 + 2 * 10 + 5$). Gauss consideraba este fracaso de Arquímedes como la mayor calamidad para la historia de la ciencia. "¡A qué altura estaría la ciencia ahora si Arquímedes hubiera hecho ese descubrimiento!", exclamaba pensando en sus cálculos aritméticos y astronómicos que habrían sido imposibles sin la notación decimal. Apreciando con claridad la significación que para todas las ciencias tendría el perfeccionamiento de los métodos de cálculo, Gauss trabajó como un esclavo hasta que largas páginas de números eran reducidas a escasas líneas, que podían ser examinadas rápidamente. Gauss hizo gran parte de sus cálculos mentalmente, pero los perfeccionamientos eran necesarios para los individuos de menos capacidad mental.

A diferencia de Newton en sus últimos años, Gauss jamás se sintió atraído por los cargos públicos, aunque su agudo interés y sagacidad en todas las cuestiones correspondientes a la ciencia de la estadística, seguros y "aritmética política" habrían hecho de él un excelente Ministro de Hacienda. Hasta su última enfermedad, se sintió completamente satisfecho dedicándose a su ciencia y a sus sencillas diversiones. La lectura de los literatos europeos y de los clásicos de la antigüedad, el interés por la política mundial y el estudio de las lenguas extranjeras y de las nuevas ciencias (incluyendo la botánica y la mineralogía) constituían sus diversiones.

Le atraía especialmente la literatura inglesa, aunque los aspectos tétricos de las tragedias de Shakespeare no eran adecuados para la aguda sensibilidad del gran matemático a todas las formas de sufrimientos, y prefería otras obras menos trágicas. Las novelas de Sir Walter Scott (contemporáneo de Gauss), eran leídas ávidamente en cuanto aparecían, pero el lamentable final de *Kenilworth* apesadumbró a Gauss durante algunos días, y lamentó mucho haber leído la triste historia. Un desliz de Sir Walter hizo reír al astrónomo matemático, y empleó muchos días para corregir en todos los ejemplares que encontró la errónea frase "la luna se pone por el noroeste". Las obras históricas en inglés, particularmente la *Declinación* y *caída del Imperio Romano* de Gibbon y la *Historia de Inglaterra* de Macaulay, le proporcionaron un placer especial.

Para su joven y meteórico contemporáneo Lord Byron, Gauss sentía marcada antipatía. La postura de Byron, su hastío del mundo reiteradamente expresado, su afectada misantropía, y sus perfiles románticos habían cautivado a los sentimentales alemanes todavía más de lo que habían impresionado a los impasibles británicos, quienes, por lo menos los varones, pensaban que Byron era un asno estúpido. A Gauss le disgustaba el histerismo de Byron. Ningún hombre que hubiera gustado tantos y tan excelentes licores y, hubiera conocido tan hermosas damas como Byron, podía estar tan hastiado del mundo como pretendía estar este perverso poeta, de ojos centelleantes y manos temblorosas.

Los gustos de Gauss por la literatura de su propio país no eran los corrientes de un alemán intelectual. Jean Paul constituía su poeta germano favorito; Goethe y Schiller, cuya vida se superpone en parte a la suya, no gozaban de su más alta estima. Goethe no le satisfacía, y en cuanto a Schiller, por tener una base filosófica diferente de la suya, le disgustaba como poeta. Calificó la *Resignación* como un poema corrompido y blasfemo y en el margen de su ejemplar escribió la palabra "Mefistófeles".

La facilidad con que dominó los idiomas durante su juventud la conservó durante toda su vida. Las lenguas eran para él una verdadera diversión. Cuando ya era anciano quiso comprobar la flexibilidad de su cerebro aprendiendo un nuevo idioma. Creía que este ejercicio le ayudaría a mantener joven su mente. En efecto, teniendo 68 años comenzó a estudiar intensamente el ruso, sin ayuda de nadie. A los dos años leía las obras rusas en prosa y en verso con facilidad, y escribía en ruso sus cartas a los amigos científicos de San Petersburgo. En opinión de los rusos que le visitaron en Göttingen, también hablaba este idioma perfectamente. La literatura rusa era colocada por él al nivel de la inglesa por el placer que le proporcionaba. También intentó aprender sánscrito pero no le gustó.

Su tercera diversión, la política mundial, le absorbía una hora más o menos al día. Visitando las bibliotecas con regularidad, se mantenía al corriente de los acontecimientos, leyendo todos los diarios recibidos desde el *Times* de Londres a las revistas locales de Göttingen.

En política, el aristócrata intelectual Gauss era completamente conservador, pero no en sentido reaccionario. Su época era turbulenta, tanto en su país come en el extranjero. El gobierno del populacho y los actos de violencia política producían en él, como refiere su amigo von Waltershausen, un "indescriptible horror". La revuelta de París en 1848, le llenó de pesadumbre.

Hijo de padres pobres, familiarizado desde la infancia con la inteligencia y moralidad de "las masas", Gauss recordaba lo que había observado, y su opinión acerca de la inteligencia, moralidad, y talento político del "pueblo" tomado en masa como hacen los demagogos, era extraordinariamente despectiva. "*Mundus vult decepi"* era un dicho que encerraba una gran verdad.

Esta desconfianza en la moralidad, integridad e inteligencia innatas del "hombre natural" de Rousseau cuando constituye el populacho o cuando delibera en salones, parlamentos, congresos y senados, fue, sin duda, inspirada, en parte, por el íntimo conocimiento de Gauss, como hombre de ciencia, de lo que "el hombre natural" hizo a los científicos franceses en los primeros días de la Revolución Francesa. Puede ser cierto, como los revolucionarios declaraban, que "el pueblo no tiene necesidad de ciencia", pero esa declaración, para un hombre del temperamento de Gauss, constituía un desafío. Aceptando el desafío, Gauss, a su vez, expresó su desprecio para todos los "conductores del pueblo" que llevan a las gentes a la revolución para su propio provecho. Cuando era anciano, creía que la paz y el simple bienestar constituían lo único bueno para cualquier país. Si la guerra civil hubiera estallado en Alemania, decía, pronto habría muerto. Las conquistas en la forma napoleónica le parecían una incomprensible locura.

Estos sentimientos conservadores no eran la nostalgia de un reaccionario, que piensa en las delicias de un pasado muerto e invariable. Gauss creía en las reformas, cuando eran inteligentes, y si el cerebro no sirve para juzgar qué reformas son inteligentes y cuáles no, ¿qué órgano del cuerpo humano es el apropiado? Gauss tenía un cerebro suficientemente potente para ver dónde llevaban a Europa algunos de los grandes hombres de Estado de su propia generación. El espectáculo no le inspiraba confianza.

Sus amigos más progresistas atribuían el conservatismo de Gauss al aislamiento a que le obligaba su obra. Puede que en parte sea verdad. En los últimos veintisiete años de su vida, Gauss sólo una vez durmió fuera de su observatorio, cuando asistió a una reunión científica en Berlín, para satisfacer a

Alexander von Humboldt. Pero un hombre no siempre tiene que recorrer todo el mapa terrestre para ver lo que sucede. El cerebro y la capacidad para leer los diarios (hasta cuando mienten) y los informes de los gobiernos (especialmente cuando mienten) son algunas veces mejores que las visitas a países lejanos y los chismes de las antesalas de los hoteles. Gauss permaneció en su hogar leyendo, desconfiando de la mayor parte de lo que leía, pensando y llegando así a la verdad.

Otra causa del vigor de Gauss se encuentra en su serenidad científica y en la ausencia de ambiciones personales. Toda su ambición era el progreso de la Matemática. Cuando algún rival dudaba de sus afirmaciones referentes a alguna cuestión de prioridad, Gauss no exhibía su diario para demostrar la verdad de su aserto, sino que dejaba al tiempo enjuiciar los propios méritos.

Legendre fue uno de los que más dudaron, y un suceso hizo de él el más enconado enemigo de Gauss. En la *Theoria motus*, Gauss se refería a su descubrimiento del método de los mínimos cuadrados. Legendre había publicado el método en 1806, antes que Gauss. Con gran indignación Legendre escribió a Gauss, acusándole de falta de honradez, y quejándose de que un hombre que había hecho tantos descubrimientos tuviera la falta de decoro de apropiarse el método de los mínimos cuadrados, que Legendre consideraba como propio, Laplace intervino en la querella. No dijo si creía en las seguridades de Gauss respecto a que se había anticipado a Legendre en 10 o más años, pues conservó su suavidad habitual. Gauss no quiso presentar argumento alguno. Pero en una carta a un amigo da la prueba que podía haber puesto fin a la disputa para siempre. "Comuniqué todo este asunto a Olbers en 1802 -dice Gauss- y si Legendre lo duda podía haber interrogado a Olbers, quien conserva el manuscrito".

La disputa redundó en perjuicio del desarrollo de la Matemática, pues Legendre contagió sus injustificadas sospechas a Jacobi, e impidió que este joven, que más tarde iba a desarrollar las funciones elípticas, se pusiera en relación cordial con Gauss. Esta falta de comprensión es muy lamentable, pues Legendre era un hombre de un carácter superior y muy escrupuloso. Fue su destino verse superado por matemáticos de más imaginación que él en los campos donde la mayor parte de su larga y laboriosa vida fue gastada, y hombres más jóvenes, Gauss, Abel y Jacobi, demostraron que muchos de sus detalles eran superfluos. En todos los momentos Gauss marchó a la cabeza de Legendre. Sin embargo, cuando Legendre le acusó de haber procedido mal, Gauss acusó el golpe. Escribiendo a Schumacher (30 de julio de 1806), se queja de que "parece que es mi destino coincidir en casi todos mis trabajos teóricos con Legendre. Así ha ocurrido en Aritmética superior, en las investigaciones sobre las funciones transcendentes relacionadas con la rectificación [el proceso de encontrar la longitud del arco de una curva] de la elipse, en los fundamentos de la geometría, y ahora otra vez aquí [el método de los cuadrados mínimos]... también usado en la obra de Legendre......

Con la publicación detallada de los trabajos póstumos de Gauss y de gran parte de su correspondencia de los últimos años, todas estas antiguas disputas han sido falladas en favor de Gauss. Queda otro punto que ha merecido críticas: su falta de cordialidad para recibir las grandes obras de los demás, particularmente de los jóvenes. Cuando Cauchy comenzó a publicar sus brillantes descubrimientos de la teoría de funciones de una variable compleja, Gauss lo ignoró. El príncipe de los matemáticos no pronunció una palabra de elogio o de aliento para el joven francés. ¿Por qué ocurrió esto? Gauss mismo (como hemos visto) llegó a la médula de la cuestión años antes de que Cauchy comenzará sus trabajos. Una memoria sobre la teoría había sido una de las obras maestras de Gauss. Además, cuando el trabajo de Hamilton sobre los cuaternios (que será considerado en un capítulo posterior) tuvo que llamar su atención en 1852, tres años antes de su muerte, Gauss nada dijo. ¿Por qué procedió así?

El nudo de la cuestión yacía enterrado entre sus notas de más de treinta años antes. Gauss mantenía su calma y no hacía reclamaciones respecto a la prioridad. Como con el caso de sus anticipaciones en la teoría de funciones de una variable compleja, de las funciones elípticas y de la geometría no euclidiana, Gauss se sentía contento de haber realizado la obra y con ello le bastaba.
El nudo del problema de los cuaternios se halla en el Álgebra, que es para las rotaciones en el espacio de tres dimensiones lo que el Álgebra de los números complejos es para las rotaciones en un plano. Pero en los cuaternios (Gauss los llamó mutaciones), una de las reglas fundamentales del Álgebra se derrumba. Ya no es verdad que

$$a * b = b * a,$$

y es imposible establecer un Álgebra de rotaciones en tres dimensiones en que esta regla se conserve. Hamilton, uno de los grandes genios matemáticos del siglo XIX, refiere con exuberancia irlandesa cómo luchó durante quince años con la invención de un Álgebra consecuente para hacer lo que se exigía, hasta que una feliz inspiración le dio la clave de que $a * b$ no era igual a $b * a$ en el Álgebra que buscaba. Gauss nada dice acerca del tiempo que consumió para alcanzar la meta; simplemente refiere sus resultados en algunas escasas páginas de Álgebra.
Si Gauss era algo frío en sus expresiones impresas era suficientemente cordial en su correspondencia y en sus relaciones científicas con quienes le buscaban con un espíritu de desinteresada curiosidad. Una de sus amistades científicas no sólo tiene interés matemático, también muestra la liberalidad de las opiniones de Gauss referente a las mujeres dedicadas a la ciencia. La amplitud de su mente a este respecto es muy notable para cualquier hombre de su generación, pero para un alemán carecía casi de precedentes.
La dama en cuestión era Mademoiselle Sophie Germain (1776-1831), que tenía un año más que Gauss. Ella y Gauss jamás se encontraron, y Sophie murió (en París) antes de que la Universidad de Göttingen la concediera el grado de Doctor Honorario que Gauss solicitaba de la Facultad, para ella. Por una curiosa coincidencia veremos que la mujer matemática más célebre del siglo XIX, otra Sophie, obtuvo su grado en la misma liberal Universidad muchos años después de que Berlín la rechazara, teniendo en cuenta su sexo. Sofía parece ser un nombre feliz en la Matemática para las mujeres, siempre que se afilien a maestros de amplia mente. La mujer matemática que ha rayado a mayor altura en nuestros tiempos Emmy Noether (1882-1935) procedía también de Göttingen[4].
El interés científico de Sophie Germain abarcó la acústica, la teoría matemática de la elasticidad y la aritmética superior, en cuyos campos realizó notables trabajos. Una contribución al estudio del último teorema de Fermat dio lugar, en 1908, a un considerable progreso en esta dirección por parte del matemático americano Leonard Eugene Dickson (1874).
Después de haber leído las *Disquisitiones Arithmeticae*, Sophie escribió a Gauss comunicándole algunas de sus observaciones aritméticas. Temiendo que Gauss pudiera abrigar prejuicios contra una mujer matemática le escribió con nombre de hombre. Gauss formó una alta opinión del autor de las cartas, redactadas en excelente francés, y firmadas por "Mr. Leblanc".

---

[4] Cuando los sagaces nazis expulsaron a Fraulein Noether de Alemania por ser judía, el colegio Bryn Mawr, de Pennsylvania, la recibió. Era la algebrista de mayor capacidad creadora abstracta del mundo. En menos de una semana de la nueva Alemania, Göttingen perdió la liberalidad tan querida a Gauss, por cuyo mantenimiento luchó toda su vida.

Leblanc abandonó su disfraz cuando Sophie Germain se vio forzada a revelar su verdadero nombre a Gauss con motivo del sitio de Hanover por las tropas francesas. En una carta fechada el 30 de abril de 1807, Gauss da las gracias a Sophie por su intervención, acerca del general francés Penerty, y deplora la guerra. A continuación, Gauss, hace grandes elogios de su amiga, y añade algunos comentarios acerca de su gran amor por la teoría de números. Como esto último tiene particular interés, citaremos un párrafo de dicha carta, que muestra a Gauss en uno de sus aspectos humanos más cordiales.

"No sé describiros mi admiración y asombro al ver a mi estimado Mr. Leblanc metamorfoseándose en este ilustre personaje [Sophie Germain], que constituye un brillante ejemplo de lo que me parecía difícil creer. El gusto por las ciencias abstractas en general, y especialmente por todos los misterios de los números, es excesivamente raro; no hay que asombrarse de ello; los encantos de esta ciencia sublime tan sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de penetrar profundamente en el problema. Pero cuando una mujer, que de acuerdo con las costumbres y prejuicios debe encontrar muchas más dificultades que los hombres para familiarizarse con estas espinosas investigaciones, consigue vencer estos obstáculos y penetrar en los rincones más oscuros de ellos, no hay duda de que una mujer debe tener el más noble valor, los más extraordinarios talentos y un genio superior. En efecto, nada puede probarme de una forma tan halagadora e inequívoca que las atracciones de esta ciencia, que me ha proporcionado en mi vida tantos goces, no son quiméricos, como la predilección con que la habéis honrado". Luego se entrega a discusiones matemáticas. Un rasgo delicado es la fecha con que termina la carta: "Bronsvic ce 30 Avril 1807 jour de ma naissance." (Brunswick este 30 de abril 1807, día de mi cumpleaños).

Una carta escrita el 21 de julio de 1807 a su amigo Olbers demuestra que su admiración por esa mujer no era simplemente una cortesía. " ... Lagrange se halla altamente interesado por la astronomía y la aritmética superior; los dos teoremas por qué el número primo 2 es un resto cúbico o bicuadrático, que yo también le comuniqué hace algún tiempo, son considerados por él entre las cosas más bellas y más difíciles de probar. Pero Sophie Germain me ha enviado sus demostraciones; yo todavía no he podido comprobarlas, pero me parecen correctas. Al menos ha planteado la cuestión en la forma adecuada, aunque algo más difusamente de lo necesario..." Los teoremas a que Gauss se refiere, son los que afirman que las congruencias $x^3 \equiv 2$ (mód p), $x^4 \equiv 2$ (mód p), tienen solución.

Sería necesario un libro muy voluminoso (quizá más voluminoso que el que requeriría la obra de Newton) para describir todas las notables contribuciones de Gauss a la Matemática pura y aplicada. Aquí tan sólo podemos referirnos a algunos de los más importantes trabajos que todavía no han sido mencionados, y elegiremos aquellos que han añadido nuevas técnicas a la Matemática o que han resuelto notables problemas. Para ordenar convenientemente las fechas resumiremos los principales campos de las preocupaciones de Gauss después de 1800 del siguiente modo: 1800-1820, astronomía; 1820-1830, geodesia, las teorías de superficies y el trazado de mapas; 1830-1840 física matemática, particularmente electromagnetismo, magnetismo terrestre y la teoría de la atracción, de acuerdo a la ley de Newton; 1840-1855 Análisis situs y la Geometría asociada con funciones de una variable compleja.

Durante el período 1821-1848 Gauss fue consejero científico de los gobiernos de Hanover (Göttingen estaba bajo el gobierno de Hanover) y danés para un extenso estudio geodésico. Gauss se entregó a la labor. Su método de los mínimos cuadrados y su habilidad para idear el modo de tratar masas de datos numéricos han sido de gran interés, pero todavía tiene más importancia el hecho de que los problemas planteados por el estudio preciso de una porción de la superficie terrestre sugieren, sin duda, problemas más profundos y más generales relacionados con todas las superficies curvas. Estas investigaciones son las que han engendrado la Matemática de la relatividad. El tema no era nuevo: algunos de los predecesores de Gauss, especialmente Euler, Lagrange y Monge, investigaron la Geometría de ciertos tipos de superficies curvas, pero quedaba reservado a Gauss abordar el problema en toda su generalidad, y partiendo de sus investigaciones se desarrolló el primer gran período de la *Geometría diferencial.*

La Geometría diferencial se puede definir en términos generales como el estudio de propiedades de las curvas, superficies, etc., en el entorno de un punto, de modo que pueden ser despreciadas en las distancias las potencias de grado superior al segundo. Inspirado por este trabajo, Rieman, en 1854, escribió su clásica exposición sobre las hipótesis que constituyen los fundamentos de la Geometría, la cual, a su vez, inició el segundo gran período de la Geometría diferencial, que en la actualidad tiene empleo en la física matemática, particularmente en la teoría de la relatividad general.

Tres de los problemas que Gauss consideró en su trabajo sobre las superficies sugieren teorías generales de importancia matemática y científica, la medición de la *curvatura*, la teoría de la *representación conforme* (o trazado de mapas), y la *aplicabilidad* de las superficies.

El innecesario concepto místico de un espacio-tiempo "curvado", que es una complicación puramente matemática de la conocida curvatura visualizable en un "espacio" definido por cuatro coordenadas, en lugar de dos, era un desarrollo natural de la obra de Gauss sobre las superficies curvas. Una de sus definiciones ilustrará la racionalidad de sus conceptos. El problema es idear algún medio preciso para describir cómo la “curvatura" de una superficie varía desde un punto a otro de la superficie; la descripción debe satisfacer nuestro sentimiento intuitivo de lo que significa "más curvado" y “menos curvado".

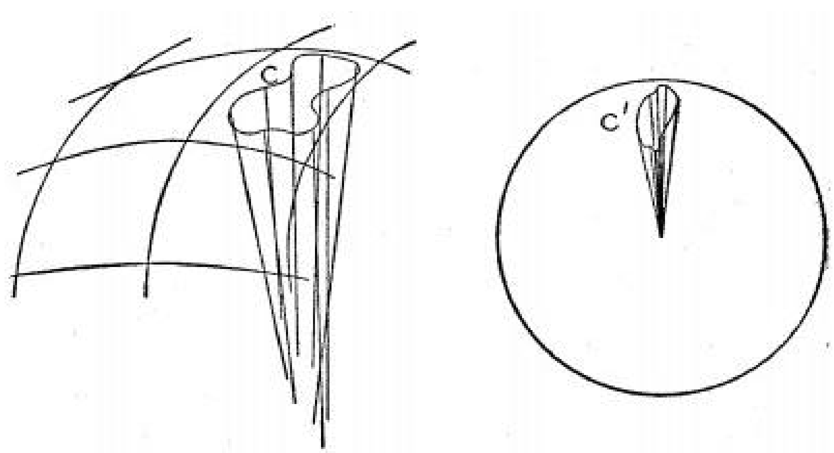


Figura 4.

La curvatura total de cualquier parte de una superficie limitada, por una curva cerrada *C* se define del siguiente modo. La *normal* a una superficie en un punto dado es la recta que pasa por el punto y que es perpendicular al plano tangente a la superficie en el punto dado. En cada punto de *C* existe una normal a la superficie. Imaginemos que se trazan todas estas normales. Ahora, desde el centro de una esfera (que puede estar en cualquier parte con referencia a la superficie considerada), cuyo radio es igual a la unidad de longitud, imaginemos que se trazan todos los radios que son paralelos a las normales a *C*. Los extremos de estos radios determinan una curva *C*', sobre la esfera de radio unidad. El *área* de esta parte de la superficie esférica cerrada por *C*' se define como la *curvatura total* de la parte de la superficie dada que es limitada por *C*. Un ligero examen mostrará que esta definición está de acuerdo con los conceptos vulgares.

Otra idea fundamental explotada por Gauss en su estudio de las superficies fue la de la *representación paramétrica*.

Requiere dos coordenadas para determinar un punto particular sobre un plano. Lo mismo ocurre cuando se trata de la superficie de una esfera o de un esferoide como la Tierra: las coordenadas, en este caso, pueden ser consideradas como latitud y longitud. Esto ilustra lo que quiere decirse con las palabras *variedad bidimensional*. En general, son necesarios y suficientes *precisamente n* números para determinar (individualizar) cada término particular de una clase de cosas (puntos, sonidos, colores, líneas, etc.), siendo la clase una *multiplicidad n-dimensional*. En tales determinaciones se acepta que sólo se asignan números a ciertas características de los términos de la clase. Por tanto, si consideramos únicamente el tono de los sonidos, tendremos una variedad unidimensional, pues un número, la frecuencia de la vibración correspondiente del sonido, basta para determinar el tono; si añadimos la sonoridad, medida en una escala conveniente, los sonidos son ahora una *variedad bidimensional*, y así sucesivamente. Si ahora consideramos una superficie como constituida por puntos, veremos que es una *variedad bidimensional* (de puntos). Usando el lenguaje de la Geometría, encontramos conveniente considerar cualquier variedad bidimensional como una "superficie", y aplicar a la variedad el razonamiento geométrico con la esperanza de hallar algo interesante.

Las consideraciones precedentes conducen a la representación paramétrica de las superficies. En la geometría de Descartes, *una* ecuación entre *tres* coordenadas representa una superficie. Supongamos que las coordenadas (cartesianas) son x, y, z. En lugar de usar una sola ecuación que ligue x, y, z, para representar la superficie, buscaremos *tres*

$$x = f(u,v),$$
$$y = g(u,v),$$
$$z = h(u,v),$$

donde $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ son las funciones (expresiones) de las nuevas variables u,v, de modo que cuando se eliminan estas variables ("se pasa el umbral") resulta entre x, y, z la ecuación de la superficie. La eliminación es posible, pues *dos* de las ecuaciones pueden ser utilizadas para despejar las *dos* incógnitas u,v; los resultados pueden entonces ser sustituidos en la tercera. Por ejemplo, si

$$x = u + v;\ y = u - v;\ z = uv,$$

tendremos $u = 1/2(x + y)$, $v = 1/2(x - y)$ de las dos primeras, y de aquí $4z = x^2 - y^2$ de la tercera. Ahora, como las variables u,v se hallan independientemente en cualquier serie dada de números, las funciones f,g,h serán tomadas en los valores numéricos, y x,y,z, se trasladarán sobre la superficie, cuyas ecuaciones son las tres antes mencionadas. Las variables u,v son llamadas los *parámetros* de las superficies, y las tres ecuaciones $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ $z = h(u,v)$ sus ecuaciones paramétricas. Este modo de representar las superficies tiene grandes ventajas sobre el cartesiano cuando se aplica al estudio de la curvatura y otras propiedades de las superficies, que varían rápidamente de un punto a otro.

Obsérvese que la representación paramétrica, es *intrínseca*; se refiere a la superficie misma por sus coordenadas, y no a una extrínseca, o extraña, serie de ejes, no relacionada con la superficie, como es el caso en el método de Descartes. Obsérvese también que los dos parámetros *u,v* muestran inmediatamente la bidimensionalidad de la superficie. La latitud y la longitud de la Tierra son ejemplos de estas coordenadas "naturales" intrínsecas; sería más difícil tener que realizar toda nuestra navegación con referencia a tres ejes recíprocamente perpendiculares trazados por el centro de la Tierra, como se requeriría para la navegación cartesiana.

Otra ventaja del método es su fácil generalización a un espacio de cualquier número de dimensiones. Basta aumentar el número de parámetros, y proceder como antes. Cuando nos ocupemos de Riemann veremos cómo estas sencillas ideas condujeron, naturalmente, a una generalización de la Geometría métrica de Pitágoras y Euclides. Los fundamentos de esta generalización fueron establecidos por Gauss, pero su importancia para la Matemática y la ciencia física no fue apreciada hasta nuestra época.

Las investigaciones geodésicas sugirieron también a Gauss el desarrollo de otro importante método en Geometría, la representación conforme de mapas. Antes de trazar un mapa, por ejemplo de Groenlandia, es necesario determinar qué es lo que ha de ser conservado. ¿Deben deformarse las distancias, como se hace en la proyección de Mercator, hasta que Groenlandia adquiera una exagerada importancia en comparación con Norte América? ¿O deben conservarse las distancias, de manera que una pulgada sobre el mapa, medida en cualquier parte en las líneas de referencia (o sea las de latitud y longitud), corresponda siempre a la misma distancia medida sobre la superficie de la Tierra? En este caso se exige un tipo de trazado de mapas, y este tipo no conservará ningún otro rasgo que deseemos conservar; por ejemplo, si dos caminos sobre la Tierra se cortan en un ángulo determinado, las líneas que representan estos caminos sobre el mapa se cortarán en un ángulo diferente. El trazado de mapas que *conserva los ángulos* se llama representación conforme. En tal trazado la teoría de funciones analíticas de una variable compleja, antes explicada, es la más útil.

Toda la cuestión del trazado conforme de mapas es de uso constante en la física matemática y en sus aplicaciones, por ejemplo en electrostática, la hidrodinámica, y su derivada la aerodinámica, en la última de las cuales desempeña un papel la teoría de la base de sustentación.

Otro campo de la Geometría que Gauss cultivó con su conocida exactitud y genio, fue el de la aplicabilidad de superficies, cuando se requiere determinar qué superficies pueden ser adaptadas a una determinada superficie sin que se estiren o rompan. También en este caso los métodos que Gauss inventó eran de tipo general y de amplia utilidad.

En otros campos de la ciencia Gauss realizó investigaciones fundamentales, por ejemplo en las teorías matemáticas del electromagnetismo, incluyendo el magnetismo terrestre, la capilaridad, la atracción de los elipsoides (los planetas son tipos especiales de elipsoides) donde la ley de atracción es la newtoniana, y la dióptrica, especialmente en lo que se refiere a los sistemas de lentes. Esto último le dio una oportunidad para aplicar a algunas de las técnicas puramente abstractas (fracciones continuas) que desarrolló siendo joven para satisfacer su curiosidad por la teoría de números.

Gauss no sólo investigó sublimemente el aspecto matemático de todas estas cosas. Usó sus manos y sus ojos, y fue un observador extraordinariamente exacto. Muchos de los teoremas específicos que descubrió, particularmente en sus investigaciones sobre electromagnetismo y la teoría de la atracción, han venido a constituir parte de los elementos indispensables para todos los que se dedican seriamente a la ciencia física. Durante muchos años, Gauss, ayudado por su amigo Weber, buscó una teoría satisfactoria para todos los fenómenos electromagnéticos. No pudiendo hallarla, abandonó su intento.

Si hubiera encontrado las ecuaciones de Clerk Maxwell (1831-1879) del campo electromagnético habría quedado satisfecho.

Para concluir esta larga pero incompleta enumeración de los muchos hallazgos que valieron a Gauss el indiscutido título de Príncipe de los matemáticos, podemos recordar un tema sobre el cual tan sólo hizo una mención de pasada en su disertación de 1799, pero que, según sus predicciones, constituiría una de las cosas principales de la Matemática, el A*nálisis situs*. *Es* imposible establecer en este lugar una definición técnica de lo que esto significa (se requiere el concepto de un *grupo continuo*), pero un simple ejemplo puede indicarnos algo acerca del tipo de problema de que se trata. Hagamos cualquier tipo de nudo en una cuerda, y unamos los extremos de esta cuerda. Un nudo "simple" se distingue con facilidad por la vista de un nudo "complicado", pero ¿cómo daríamos una explicación matemática exacta de la diferencia entre los dos? ¿Y cómo clasificaríamos matemáticamente los nudos? Aunque Gauss no publicara nada acerca de esto, inició su estudio, según pudo verse en sus trabajos póstumos. Otro tipo de problema referente a esta cuestión es determinar el número mínimo de cortes en una superficie determinada que nos permita desarrollar la superficie sobre un plano. Para una superficie cónica basta un corte, para una esfera no basta un número finito de cortes, si no se permite una deformación.

Estos ejemplos hacen pensar que el tema es trivial. Mas si fuera así, Gauss no le hubiera concedido la extraordinaria importancia que le otorgó. Su predicción acerca de su carácter fundamental se ha cumplido en nuestra generación. En la actualidad, una vigorosa escuela (incluyendo muchos americanos; J. W. Alexander, S. Lefschetz, 0. Veblen, entre otros) ha observado que el Análisis situs o la "Geometría de posición", como algunas veces se llama, tiene ramificaciones de mucha importancia para la Geometría y para el Análisis. Es de lamentar que Gauss no hubiera robado un año o dos al tiempo dedicado a Ceres para organizar los pensamientos sobre esta vasta teoría, que habiendo sido el sueño de su época, constituye una realidad en la nuestra.

Sus últimos años están colmados de honores, pero no fue tan feliz como tenía el derecho a ser. Un hombre de una mente tan poderosa y de una inventiva tan prolífica no se resignaba con el reposo cuando aparecieron los primeros síntomas de su última enfermedad, algunos meses antes de su muerte. En una ocasión pudo escapar felizmente de una muerte violenta, y esto le hizo aún más reservado de lo que antes había sido. Por primera vez en más de veinte años abandonó Göttingen el 16 de junio de 1854, para ver el ferrocarril que se estaba construyendo entre su ciudad y Cassel. Gauss siempre había tenido gran interés por la construcción de los ferrocarriles, y ahora podía satisfacer su curiosidad. Los caballos de su coche se desbocaron, y al ser despedido del carruaje sufrió una fuerte conmoción. Se restableció, y tuvo el placer de ser testigo de las ceremonias de la inauguración, cuando el ferrocarril llegó a Göttingen el 31 de julio de 1854. Este fue su último día de tranquilidad.

Al iniciarse el nuevo año comenzó a sufrir de dilatación cardíaca y disnea, apareciendo síntomas de hidropesía. A pesar de ello continuó trabajando cuanto pudo, aunque sus manos se acalambraban y su bella y clara escritura se deformaba. Su última carta fue dirigida a Sir David Brewster, comentando el descubrimiento del telégrafo eléctrico.

Completamente consciente de su fin murió pacíficamente, después de una grave lucha para vivir, en la madrugada del 23 de febrero de 1855, teniendo 78 años. Su nombre perdurará en la Matemática.

Capítulo Decimosexto
MATEMÁTICAS Y MOLINOS DE VIENTO

CAUCHY

A Dios rogando y con el mazo dando.

Proverbio español

En las primeras tres décadas del siglo XIX la Matemática se transformó repentinamente, siendo muy diferente de lo que había sido en la época heroica post-newtoniana del siglo XVIII. El cambio tuvo lugar en el sentido de exigirse mayor rigor en la demostración, seguido de una generalización sin precedentes y de una libertad de la inventiva. Algo semejante se ha producido visiblemente en nuestros días, y hay que ser un profeta para aventurarse a predecir lo que será la Matemática dentro de tres cuartos de siglo.

Al comienzo del siglo XIX sólo Gauss tuvo el barrunto de lo que pronto iba a suceder, pero su reserva newtoniana le impidió complicar a Lagrange, Laplace y Legendre lo que él preveía. Aunque los grandes matemáticos franceses vivieron en el primer tercio del siglo XIX, gran parte de su obra parece ahora haber sido preparatoria. Lagrange, en la teoría de ecuaciones, preparó el camino a Abel y Galois, Laplace, con sus trabajos sobre las ecuaciones diferenciales de la astronomía newtoniana, incluyendo la teoría de la gravitación, adivinó el desarrollo fenomenal de la física matemática en el siglo XIX, mientras las investigaciones de Legendre en el Cálculo integral abrieron a Abel *y* Jacobi, uno de los más fecundos campos de la investigación en Análisis. La mecánica analítica de Lagrange es aun moderna, pero también iba a experimentar magníficas ampliaciones con la obra de Hamilton y Jacobi y más tarde con los trabajos de Poincaré. La obra de Lagrange en el cálculo de variaciones seguirá siendo también clásica y útil, pero los trabajos de Weierstrass le dieron una nueva dirección bajo el espíritu riguroso e inventiva de la última mitad del siglo XIX, y esa dirección se ha ampliado y renovado en nuestra época. (Los matemáticos americanos e italianos han tenido una parte esencial en este desarrollo).

Augustin-Louis Cauchy, el primero de los grandes matemáticos franceses cuyo pensamiento pertenece claramente a la edad moderna, nació en París el 21 de agosto de 1789: poco menos de seis semanas después de la caída de la Bastilla. Hijo de la Revolución, pagó su precio a la libertad y a la igualdad, creciendo en malas condiciones con un cuerpo desnutrido. Gracias a la diplomacia y buen sentido de su padre Cauchy pudo sobrevivir en medio del hambre. Habiendo escapado al Terror, pasó desde la Politécnica al servicio de Napoleón. Después del derrumbe del orden napoleónico, Cauchy sufrió todas las privaciones de las revoluciones y contrarrevoluciones, y su obra fue afectada en cierto modo por la intranquilidad social de su tiempo. Si las revoluciones y otros acontecimientos semejantes son capaces de influir sobre la obra científica de un hombre, Cauchy sería un caso que demostrara el hecho. Tuvo una extraordinaria fecundidad para la invención matemática, fecundidad que sólo ha sido superada en dos casos: Euler y Cayley. Su obra, como sus tiempos, fue revolucionaria.

La Matemática moderna debe a Cauchy dos de sus principales contribuciones, cada una de las cuales marca una separación de la Matemática del siglo XVIII. La primera fue la introducción del rigor en el Análisis matemático. Es difícil encontrar símil adecuado para expresar la magnitud de este progreso, aunque quizá podrá servir el siguiente ejemplo. Supongamos que durante siglos todo un pueblo rindiera culto a falsos dioses, y que repentinamente descubriera su error. Antes de la introducción del rigor, el Análisis matemático era un panteón de falsos dioses. En esta transformación Cauchy fue uno de los grandes precursores, junto con Gauss Y Abel. Gauss podía haber marcado el camino mucho antes de que Cauchy interviniera, pero no lo hizo, y fue el hábito de la inmediata publicación propio de Cauchy, y sus dotes para la enseñanza efectiva, los que realmente establecieron el rigor en el Análisis matemático.

La segunda contribución de importancia fundamental se refiere a la faceta opuesta, a la combinatoria. Seducido por el método de Lagrange de la teoría de las ecuaciones, Cauchy comenzó la creación sistemática de la teoría de grupos. La naturaleza de esta teoría será explicada más tarde, y por el momento tan sólo haremos notar el carácter moderno del sistema de Cauchy. Sin preguntarse si lo que él inventaba tenía o no aplicaciones para las otras ramas de la Matemática, Cauchy desarrolló sus conceptos como sistema abstracto. Sus predecesores, con excepción del universal Euler, que lo mismo escribía una memoria sobre el enigma de los números que sobre la hidráulica o el "sistema del mundo", hallaron su inspiración partiendo de las aplicaciones de la Matemática. Esta afirmación tiene, como es natural, numerosas excepciones, especialmente en Aritmética; pero antes de Cauchy pocos, si hubo algunos, buscaron descubrimientos provechosos en las simples operaciones del Álgebra. Cauchy penetró más profundamente, vio las *operaciones* y sus *leyes* combinatorias que palpitaban bajo las simetrías de las fórmulas algebraicas, las aisló, y llegó así a la teoría de grupos. En la actualidad, esta teoría elemental, aunque intrincada, es de fundamental importancia en muchos campos de la Matemática pura y aplicada, desde la teoría de ecuaciones algebraicas, hasta la Geometría y la teoría de la estructura atómica. Constituye la ciencia de la Geometría de los cristales, para sólo mencionar una de sus aplicaciones. Sus ulteriores desarrollos (en la parte analítica) se extienden hasta alcanzar la mecánica superior y la moderna teoría de ecuaciones diferenciales.

La vida y carácter de Cauchy nos recuerdan los de Don Quijote: no sabemos si reír o llorar, y nos contentamos con renegar. Su padre, Louis-François, era un ejemplo de virtud y religiosidad, cosas ambas excelentes, pero en las que es fácil excederse. Los cielos saben cómo Cauchy padre pudo escapar de la guillotina, pues era un jurista parlamentario, un caballero culto, un estudioso de los clásicos, un católico fanático y, por si fuera poco, oficial de policía en París cuando cayó la Bastilla. Dos años antes de que estallara la Revolución contrajo matrimonio con Marie-Madeleine Desestre, una excelente mujer, no muy inteligente, que, como él, también era una católica fanática.

Agustín era el mayor de seis hijos (dos hijos y cuatro hijas). Agustín heredó y adquirió de sus padres todas las estimables cualidades que hacen de la lectura de su vida, una de esas historias amorosas, encantadoras, insípidas como huevos sin sal, propias para muchachas de 16 años, en las que el héroe y la heroína son puros como ángeles santos de Dios. Con tales padres, era natural que Cauchy llegara a ser el obstinado Quijote del catolicismo francés, cuando la Iglesia se hallaba a la defensiva entre los años 1830 y 1840. Sufrió por su religión, y por ello merece respeto, posiblemente hasta en el caso de que fuera el relamido hipócrita que suponen sus colegas. Sus persistentes prédicas acerca de la belleza de la santidad hizo que muchas gentes le volvieran la espalda, y engendró una posición a sus piadosos sistemas que no siempre merecían. Abel, aunque hijo de un ministro del Señor y buen cristiano, expresa el disgusto que le inspiraban algunas de las prácticas de Cauchy, cuando escribe: "Cauchy es un católico fanático, cosa extraña en un hombre de ciencia". La palabra que subraya es "fanático", y no el sustantivo que califica. Dos de los más grandes matemáticos de que luego trataremos, Weierstrass y Hermite, eran católicos. Pero eran religiosos, no fanáticos.

La infancia de Cauchy coincidió con el período más cruento de la Revolución. Las escuelas estaban cerradas. No necesitándose por el momento ciencia ni cultura, la Comuna había dejado morir de hambre a los hombres cultos y a los científicos, o los había enviado a la guillotina. Para escapar del peligro, Cauchy padre se trasladó con su familia al lugar de su nacimiento, a la aldea de Arcueil. Allí escapó al Terror, semihambriento, alimentando a su mujer y a su hijo con los escasos frutos y vegetales que podía lograr. En consecuencia, Agustín creció delicado, con escaso desarrollo físico. Pasaron casi veinte años, antes de que pudiera restablecerse de la mala nutrición de su infancia, y durante toda su vida su salud fue precaria.

Este retiro, cada vez menos estricto, duró casi once años, durante los cuales Cauchy padre emprendió la educación de sus hijos. Escribía sus propios textos, algunos de ellos en verso fluido, que dominaba a la perfección. El verso, creía Cauchy, hacen la gramática, la historia y sobre todo la moral, menos repulsivas para la mente juvenil. El joven Cauchy adquirió de este modo su extraordinaria fluidez para el verso francés y latino que le distinguió toda su vida. Sus versos abundan en nobles sentimientos, ampulosamente expresados, y reflejan admirablemente el carácter piadoso de su vida intachable. Gran parte de las lecciones fueron dedicadas a una estrecha instrucción religiosa, a la que la madre asistía.

Cerca de Arcueil se hallaban las propiedades del marqués de Laplace y del conde Claude Louis Berthollet (1748-1822), el distinguido y excéntrico químico que salvó su cabeza en la época del Terror por conocer a la perfección todos los secretos de la pólvora. Los dos eran grandes amigos. Sus jardines estaban separados por un muro común, de cuya puerta ambos poseían la llave. A pesar de que tanto el matemático como el químico no eran muy religiosos, Cauchy padre gozaba de la amistad de sus distinguidos y opulentos vecinos.

Berthollet jamás salía de su casa. Laplace, más sociable, comenzó a visitar la casucha de su amigo, donde quedó sorprendido por el espectáculo del pequeño Cauchy, demasiado débil físicamente para gozar de la libertad de un niño bien nutrido, inclinado sobre sus libros y papeles como un monje penitente. No tardó mucho Laplace en descubrir que el muchacho tenía enorme talento matemático, y le aconsejó cuidar de su salud. Pocos años después, Laplace pudo escuchar, con cierto resquemor, las conferencias de Cauchy sobre las series infinitas, temiendo que los descubrimientos del audaz joven acerca de la convergencia pudieran destruir todo el vasto edificio de su mecánica celeste. "El sistema del mundo" estuvo a punto de derrumbarse en aquella época; si la órbita de la Tierra, casi circular, hubiera sido un poco más elíptica, las series infinitas sobre las cuales Laplace basó sus cálculos, habrían sido divergentes. Felizmente, su intuición astronómica le salvó del desastre, y experimentó una sensación de infinito alivio después de una cuidadosa comprobación de la convergencia de todas sus series por los métodos de Cauchy.

El día 1° de enero de 1800, Cauchy padre, que se había mantenido discretamente en contacto con París, fue elegido secretario del Senado. Sus oficinas se hallaban en el Palacio de Luxemburgo. El joven Cauchy se aprovechaba de estas oficinas, utilizando un rincón para dedicarse al estudio. Así tuvo ocasión de ver con frecuencia a Lagrange, entonces profesor en la Politécnica, que muchas veces venía a discutir diversos asuntos con el secretario Cauchy. Lagrange se interesó pronto por el muchacho, y, lo mismo que Laplace, quedó sorprendido por su talento matemático. En una ocasión, cuando Laplace y otras notabilidades estaban presentes, Lagrange señaló al joven Cauchy, que se encontraba en su rincón, y dijo: "¿Veis ese jovencito?, pues bien, nos suplantará por lo que a la Matemática se refiere".

Lagrange dio algunos consejos a Cauchy padre, temiendo que el delicado muchacho pudiera quemarse en su propio fuego: "No le dejéis abrir un libro de Matemática hasta que tenga 17 años". Lagrange se refería a las Matemáticas superiores. En otra ocasión exclamó: "Si no os apresuráis a dar a Agustín una sólida educación literaria, sus gustos le alejarán de ella, y será un gran matemático, pero no sabrá como escribir su propio idioma". El padre siguió el consejo del gran matemático de la época, y dio a su hijo una sólida educación literaria antes de permitirle dedicarse a las Matemáticas superiores.

Después de que el padre había hecho por el muchacho todo lo que estaba en su mano, Cauchy ingresó en la Escuela Central del Panteón a la edad de 13 años. Napoleón había instituido diversos premios en la Escuela, y una especie de premio general para todas las escuelas de Francia de la misma clase. Desde el principio, Cauchy fue el astro de la Escuela, obteniendo los primeros premios en griego, composición latina y verso latino. Al dejar la escuela, en 1804, ganó el premio general a que nos hemos referido, y un premio especial en humanidades. El mismo año Cauchy recibió su primera comunión, una ocasión solemne en la vida de cualquier católico, y todavía más solemne para él.

En los 10 meses siguientes estudió Matemática intensamente con un gran profesor, y en 1805, teniendo 16 años pasó a segundo año en la Politécnica. Su vida no fue muy feliz entre aquellos jóvenes excéntricos, que se burlaban de él sin piedad cuando hacía exhibición pública de sus creencias religiosas. Pero Cauchy mantenía sus opiniones, y hasta intentó convertir a alguno de sus burladores.

Desde la Politécnica, Cauchy pasó a la Escuela de Ingenieros Civiles *(Ponts et Chaussés)* en 1807. Aunque sólo tenía 18 años, superó fácilmente a muchachos de 20, que ya habían pasado dos años en la Escuela. Para completar su enseñanza, Cauchy fue nombrado, en marzo de 1810, para una importante misión. Su talento y audaz originalidad le señalaban como un hombre para quien no existían obstáculos ni peligros.

En marzo de 1810, cuando Cauchy abandonó París, con escaso equipaje pero lleno de esperanzas, y se dirigió a Cherburgo para desempeñar su primera misión, la batalla de Waterloo (18 de junio de 1815), todavía tardaría cinco años en producirse, y Napoleón confiaba aún en asir Inglaterra por el cuello y hacerla morder el polvo. Antes de que pudiera ser intentada la invasión, era necesario construir una enorme flota. Puertos y fortificaciones, para defender los astilleros de los ataques de los marinos ingleses, constituían el primer requisito para llevar a la práctica lo deseado. Cherburgo era, por muchas razones, el punto lógico para comenzar todas las grandiosas operaciones necesarias para apresurar el "día de gloria", que los franceses anunciaban desde la caída de la Bastilla. De aquí que el joven e inteligente Cauchy fuera enviado a Cherburgo, para que llegara a ser un gran ingeniero militar.

En su escaso equipaje, Cauchy llevaba únicamente cuatro libros, la *Mécanique celeste* de Laplace, el *Traité des fonctions analytiques* de Lagrange, la *Imitación de Cristo,* de Thomas Kempis y un ejemplar de las obras de Virgilio, rara biblioteca para un joven y ambicioso ingeniero militar. El tratado de Lagrange iba a ser el libro que transformarla en realidad la profecía de su autor, cuando dijo: "Este joven nos suplantará a todos", pues incitó a Cauchy a buscar alguna teoría de las funciones exenta de los evidentes defectos de la teoría de Lagrange.

El tercer libro mencionado, produjo algunos disgustos a Cauchy, pues con él, y su agresiva religiosidad, excitó los nervios de sus prácticos colaboradores, que estaban ansiosos de ver cómo podían conciliar sus opiniones con una tarea que significaba destrucción. Pero Cauchy pronto les demostró, al ofrecerles la otra mejilla, que al menos había leído el libro. Pronto olvidarás todo eso, le aseguraron. Pero Cauchy replicó preguntándoles suavemente en qué punto era errónea su conducta para poder corregirla. No se conoce la respuesta que recibió esta pregunta.

Los rumores de que su querido hijo se estaba transformando en un infiel o algo peor, llegó a los oídos de su angustiada madre. En una carta suficientemente larga y suficientemente llena de sentimientos piadosos para calmar a todas las madres que tienen a sus hijos al frente o en cualquier lugar semejante, Cauchy la tranquilizó, y la madre se sintió nuevamente feliz. La conclusión de la carta muestra que el santo Cauchy era capaz de mantener sus propias ideas contra sus atormentadores, aunque sus bromas le tuvieran casi enloquecido.

"Es ridículo suponer que la revolución pueda trastornar a alguien la cabeza, y si todos los locos fueran enviados a los manicomios, allí se encontrarían más filósofos que cristianos". ¿Incurre Cauchy en un desliz o quiere decir realmente que ningún cristiano es filósofo? Más tarde añade: "Pero ya es bastante: es más provechoso para mí trabajar en ciertas memorias sobre Matemática". Precisamente, cada vez que veía un molino agitando sus gigantescos brazos bajo el cielo.

Cauchy permaneció alrededor de tres años en Cherburgo. Aparte de sus deberes con el cielo, su tiempo fue muy bien empleado. En una carta fechada el 3 de julio de 1811, describe así su atareada vida. "Me levanto a las cuatro y trabajo desde la mañana hasta la noche. Mi labor diaria ha aumentado este mes por la llegada de los prisioneros españoles. Fuimos avisados con sólo ocho días de anticipación y durante esos ocho días, hemos tenido que construir barracas y preparar camas de campaña para 1.200 hombres... Finalmente, nuestros prisioneros han quedado alojados bajo techado desde hace dos días. Tienen camas, alimento y se consideran muy afortunados... El trabajo no me fatiga; por el contrario me fortalece, y me encuentro en perfecta salud".

A pesar de este intenso trabajo *pour la gloire de la belle France,* Cauchy todavía tenía tiempo para sus investigaciones. A primeros de diciembre de 1810 se dedicó a "repasar todas las ramas de la Matemática, comenzando por la Aritmética y terminando con la astronomía, aclarando puntos oscuros y aplicando [mis propios métodos] para la simplificación de las demostraciones y el descubrimiento de nuevas proposiciones". En fin, este sorprendente muchacho encontró tiempo para instruir a quienes solicitaban sus lecciones para ascender en su profesión, y también ayudó al alcalde de Cherburgo en los exámenes escolares. En esta forma aprendió a enseñar. Aun le restaron algunos momentos para dedicarse a sus distracciones.

El fracaso de Moscú en 1812, la guerra contra Prusia y Austria, la batalla de Leipzig, en octubre de 1813, desviaron la atención de Napoleón de su sueño de invadir Inglaterra, y las obras de Cherburgo languidecieron. Cauchy volvió a París en 1813, fatigado por el exceso de trabajo. Tenía entonces 24 años; pero atrajo la atención de los principales matemáticos de Francia por sus brillantes investigaciones, particularmente por su memoria sobre los poliedros y por otra sobre las funciones simétricas. Como ambos temas pueden comprenderse fácilmente, y ambos ofrecen sugestiones de suma importancia para la Matemática actual, los explicaremos brevemente.

La primera memoria es de escaso interés en sí misma. Lo que tiene importancia, al ser considerada actualmente, es la extraordinaria agudeza de la crítica que Malus hizo de ella. Por una curiosa coincidencia histórica, Malus estuvo exactamente un siglo a la cabeza de su época al objetar el razonamiento de Cauchy en la forma precisa en que lo hizo. La Academia había propuesto como problema para el premio el siguiente tema*: "Perfeccionar en algún punto esencial la teoría de poliedros",* y Lagrange consideró que esta investigación era muy adecuada para que fuera emprendida por el joven Cauchy. En febrero de 1811, Cauchy escribió su primera memoria sobre la teoría de poliedros. En ella se responde negativamente a la cuestión planteada por Poinsot (1777-1859): ¿Es posible que haya más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12, 16 y 20 caras? En la segunda parte de su memoria Cauchy amplía la fórmula de Euler que se encuentra en los manuales de Geometría, relacionando el número de aristas (*A*), caras (*C*) y vértices (*V*) de un poliedro,

$$A + 2 = C + V$$

Esta obra fue impresa. Legendre la consideró como muy importante y alentó a Cauchy a que la continuara. Así lo hizo éste en una segunda memoria (enero, 1812). Legendre y Malus (1775-1812) eran los jueces. Legendre estaba muy entusiasmado y predijo grandes triunfos para el joven autor, pero Malus se mostró más reservado.

Étienne-Louis Malus no era un matemático profesional, sino un ex-oficial de ingenieros en las campañas de Napoleón en Alemania y Egipto, que se hizo famoso por su casual descubrimiento de la polarización de la luz por reflexión. Posiblemente sus objeciones fueron consideradas por el joven Cauchy como una crítica capciosa, que era de esperar en un obstinado físico. Para demostrar sus teoremas más importantes, Cauchy usó el método de reducción al absurdo, familiar a todos los principiantes en Geometría. Las objeciones de Malus se referían este método de prueba.

Para probar una proposición por el absurdo se deduce una contradicción con la falsedad aceptada de la proposición; y entonces, según la lógica aristotélica, se concluye que la proposición es falsa. Cauchy no pudo responder a la objeción dando demostraciones directas, y Malus lo hizo, aunque no estaba convencido de que Cauchy hubiera probado algo. Cuando lleguemos a la conclusión de toda esta historia (en el último capítulo), veremos que la misma objeción ha sido hecha en otras cuestiones por los intuicionistas. Si Malus no pudo convencer a Cauchy en 1812, fue vengado por Brouwer en 1912 cuando éste consiguió que los sucesores de Cauchy comprendieran que en el Análisis matemático existe un punto que debe ser examinado cuidadosamente. La lógica aristotélica, como Malus dijo a Cauchy, no siempre es un método seguro de razonamiento matemático.

Ocupándonos ahora de la *teoría de sustituciones,* iniciada sistemáticamente por Cauchy y elaborada por él en una larga serie de trabajos a partir de 1840, que llega a su completo desarrollo en la *teoría de grupos finitos,* podemos presentar los conceptos fundamentales con un simple ejemplo. De todos modos, describiremos en primer término, a grandes rasgos, las propiedades principales de un *grupo de operaciones.*

Las operaciones pueden ser indicadas con letras mayúsculas *A, B, C, D,...,* y el resultado de dos operaciones sucesivas, es decir, *A* en primer término, *B* en segundo, serán indicadas por una posición adecuada, es decir *AB*. Obsérvese también que *BA*, según lo que hemos dicho, significa que *B* se realiza en primer término y *A* en segundo; de modo que *AB y BA* no son necesariamente la misma operación. Por ejemplo *si A* es la operación de "añadir 10 a un número dado" y *B* es la operación de "dividir un número dado por 10, *AB* aplicado a *x* da

$$\frac{x+10}{10}$$

mientras *BA* da

$$\frac{x}{10}+10=\frac{x+100}{10}$$

y las fracciones resultantes son desiguales; de aquí que AB *y BA* sean diferentes.
Si el resultado de dos operaciones *X*, *Y* son los mismos, se dice que *X e Y son iguales (o equivalentes),* y esto se expresa escribiendo *X = Y.*
El siguiente concepto fundamental es el de la *asociación. Si* en cualquier sistema de tres operaciones, *U, V, W* se verifica *(UV) W = U(VW)*, se dice que el conjunto de esas operaciones satisface la ley *asociativa.* (UV)W expresa que *UV* se realiza primero, y luego, conociendo el resultado, se realiza *W; U(VW)* significa que U se realiza primero, y luego, conociendo el resultado, se realiza *VW.*
El último concepto fundamental es el de *operación idéntica* o identidad; una operación *I* que no produce cambios cuando actúa se llama la *identidad.*
Con estos conceptos podemos enunciar los simples postulados que definen un grupo de operaciones.
Un conjunto de operaciones *I, A, B, C,... X, Y,...* se dice que forma un *grupo si* quedan satisfechos los postulados (1) - (4).

1. Existe una regla combinatoria aplicable a cualquier par *X, Y* de operaciones[1] del conjunto dado, tal que el resultado, representado por *X Y*, de combinar *X* con *Y* en este orden, de acuerdo con la regla es una operación unívocamente determinada del conjunto.
2. Para cualquier *sistema* de operaciones *X, Y, Z,* del conjunto, la regla (1) es asociativo; o sea *(XY)Z = X(YZ).*
3. Existe una operación única *I* en el conjunto, de tal modo que para toda operación *X* perteneciente a él, es *IX = XI = X.*
4. Si *X* es cualquier operación del conjunto, existe en él, una operación única *X*', tal que *XX' = I* (puede ser fácilmente probado que también *X'X = I).*

Estos postulados contienen redundancias deducibles partiendo de otros enunciados de (1) - (4), pero en la forma mencionada los postulados son más fáciles de comprender. Para ilustrar un grupo consideraremos un ejemplo muy sencillo, relativo a las permutaciones de las letras. Esto podrá parecer trivial, pero tal permutación o sustitución de grupos constituye la clave tanto tiempo buscada de la resolución algebraica de las ecuaciones. .
Existen precisamente seis maneras de escribirlas tres letras *a, b, c*, o sea

abc, acb, bca, bac, cab, cba.

Tomemos cualquiera de estas permutaciones, por ejemplo la primera *abc*, como el orden inicial. ¿Mediante qué permutaciones de las letras podemos pasar desde ésta a las otras cinco disposiciones? Para pasar de *abc* a *acb* es suficiente intercambiar o permutar *b* y *c*. Para indicar la operación de permutar *b y c*, escribimos (*bc*), que se lee "*b en lugar de c y c en lugar de b*". De *abc* pasamos a *bca*, poniendo *a* en lugar de *b*, *b* en lugar de *c*, y *c* en lugar de *a*, lo que se escribe (*abc*). El mismo orden *abc* se obtiene a partir de *abc* sin ningún cambio, o sea *a* en lugar de *a, b* en lugar de *b, c* en lugar de *c*, que es la sustitución idéntica, y se denota por *I*. Procediendo de modo análogo con las seis permutaciones

[1] Las operaciones de un par pueden ser la misma operación; así *X, X*

abc, acb, bca, bac, cab, cba,

tendremos las sustituciones correspondientes,

I, (bc), (abc), (ab), (acb), (ac)

La "regla combinatoria" en los postulados es aquí la siguiente. Tómense dos cualesquiera de las sustituciones, por ejemplo (*bc*) y (*acb*), y consideremos el efecto de éstas aplicado sucesivamente en el orden enunciado, o sea (*bc*) primero y (*acb*) segundo: (*bc*) coloca b en lugar de *c*, entonces (*acb*) coloca *c* en lugar de *b*. Por tanto *b* se deja como estaba. Tomemos la siguiente letra, *c*, en (*bc*): por *(be), c* se coloca en lugar de *b*, la que por (*aeb*) se coloca en lugar de *a*; por tanto, *c* se coloca en lugar de *a*. Continuando, veremos como *a* es ahora colocada: (*be*) deja a como estaba; pero (*a,b*) coloca *a* en lugar de *c*. Finalmente, el efecto total de (*be*) seguido por (*acb*) será (*ca*), lo que se indica escribiendo (*bc*) (*acb*) (*ca*) (*ac*).
En la misma forma se comprueba fácilmente que

(acb) (abc) (abc) (acb) = I;
(abc) (ac) (ab); (be) (ac) = (acb),

y así sucesivamente para todos los pares posibles. Así, el postulado (1) se satisface para estas seis sustituciones, y puede comprobarse que también (2), (3), (4) quedan satisfechos.
Todo esto se resume en la "tabla de multiplicación del grupo", que puede componerse representando las sustituciones por las letras escritas bajo ellas (para ganar espacio),

I	*bc*	*abc*	*ab*	*acb*	*ac*
I	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*

Para usar la tabla una letra, por ejemplo *C*, se busca en la columna del lado izquierdo, y otra letra, por ejemplo *D*, en la fila superior, y el lugar *A*, donde se cortan la fila y la columna correspondiente, es el resultado *CD. Así CD A, DC = E, EA B,* y así sucesivamente.

	I	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
I	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	*A*	*I*	*C*	*B*	*E*	*D*
B	*B*	*E*	*D*	*A*	*I*	*C*
C	*C*	*D*	*E*	*I*	*A*	*B*
D	*D*	*C*	*I*	*E*	*B*	*A*
E	*E*	*B*	*A*	*D*	*C*	*I*

Como ejemplo podemos comprobar la ley asociativa *(AB)C = A (BC),* lo que sería igual. Primero *AB = C;* luego *(AB)C = CC = I*. Por otra parte *BC = A*; por tanto *A (BC) = AA* = I. En la misma, forma *A (DB) = AI = A; (AD)B = EB = A*; por tanto *(AD)B A (DB)*

El número total de operaciones diferentes de un grupo se llama su orden. Aquí 6 es el orden del grupo. Examinando el cuadro elegiremos varios *subgrupos,* por ejemplo,

	I
I	*I*

;

	I	*A*
I	*I*	*A*
A	*A*	*I*

;

	I	*B*	*D*
I	*I*	*B*	*D*
B	*B*	*D*	*I*
D	*D*	*I*	*B*

que son de los órdenes respectivos 1, 2, 3. Esto ilustra uno de los teoremas fundamentales demostrados por Cauchy: *El orden de* cualquier *subgrupo es un divisor del orden del grupo.*
El lector puede entretenerse intentando la construcción de grupos de órdenes que no sean 6. Para un orden dado, el número de grupos diferentes (que tienen tablas de multiplicación diferentes) es finito, pero no se sabe cuál podrá ser este número para cualquier orden dado (el orden general n), ni probablemente podrá conocerse en nuestra época. De modo que desde el comienzo de una teoría, que examinada superficialmente es tan sencilla como el dominó, llegamos a problemas no resueltos.
Después de haber construido la "tabla de multiplicación" de un grupo, olvidaremos su derivación de las sustituciones, y consideraremos la tabla como definidora de un *grupo abstracto.* Es decir, los símbolos *I, A, B,...* no dan una interpretación más allá de la indicada por la regla combinatoria, como en *CD = A, DC = E,* etc. Este punto de vista abstracto es ahora corriente. No era el de Cauchy, pues fue propuesto por Cayley en 1854. Tampoco fue enunciado un conjunto completamente satisfactorio de postulados hasta la primera década del siglo XX.
Cuando las operaciones de un grupo son interpretadas como sustituciones, o como las rotaciones de un cuerpo rígido, o en cualquier otra sección de las Matemáticas, a la cual sean aplicables los grupos, la interpretación se denomina, una aplicación del grupo *abstracto* definido por la tabla de multiplicación. Un grupo abstracto determinado puede tener muy diferentes aplicaciones. Esta es una de las razones para que los grupos sean de fundamental importancia en la Matemática me<Ierna: una *estructura básica abstracta* (la resumida en la tabla de multiplicación) de uno y el mismo grupo es la esencia de diversas teorías al parecer inconexas, y por un intenso estudio de las propiedades del grupo abstracto, se obtiene, mediante una investigación en lugar de varias, un conocimiento de las teorías en cuestión y de sus relaciones recíprocas.
Para citar un ejemplo diremos que el conjunto de todas las rotaciones de un icosaedro regular (sólido regular de 20 caras) alrededor de sus ejes de simetría, de modo que después de cada rotación del conjunto el volumen del sólido ocupe el mismo espacio que antes, forma un grupo, y este grupo de rotaciones, cuando se expresa abstractamente, es el mismo grupo que el que aparece en las permutaciones de las raíces cuando intentamos resolver la ecuación general de quinto grado. Además, este mismo grupo (anticipándonos algo) aparece en la teoría de funciones elípticas. Esto permite pensar que aunque es imposible resolver algebraicamente la quíntica general, la ecuación puede ser, y en efecto es, resoluble mediante las funciones mencionadas. Finalmente, todo este proceso puede ser expuesto geométricamente describiendo las rotaciones de un icosaedro ya mencionadas. Esta bella unificación fue la obra de Félix Klein (1849-1925) en su memoria sobre el icosaedro (1884).
Cauchy fue uno de los grandes precursores de la teoría de grupos de sustituciones. Desde ese día se han realizado numerosos trabajos sobre la cuestión, y la teoría misma se ha extendido notablemente por la consideración de *grupos infinitos:* grupos que tienen una infinidad de

operaciones que pueden ser numeradas 1, 2, 3,... y además, de grupos de movimientos continuos. En los últimos una operación del grupo traslada un cuerpo hacia otra posición por desplazamientos infinitesimales (arbitrariamente pequeños), a diferencia del grupo icosaedro antes aludido donde las rotaciones desplazan todo el cuerpo en una cantidad finita. Esta es una categoría de grupos infinitos (la terminología aquí no es exacta, pero es suficiente para demostrar una cuestión de importancia, la distinción entre grupos discontinuos y continuos). Lo mismo que la teoría de grupos discontinuos finitos es la estructura básica de la teoría de ecuaciones algebraicas, así también la teoría de grupos continuos infinitos es de gran utilidad en la teoría de ecuaciones diferenciales, que son de máxima importancia en física matemática. Al estudiar los grupos, Cauchy no hizo una obra inútil.

Para terminar esta explicación de los grupos podemos indicar que los grupos de sustituciones estudiados por Cauchy intervienen en la moderna teoría de la estructura atómica. Una sustitución, por ejemplo (xy), que contenga precisamente dos letras en su símbolo, se llama una *transposición.* Se demuestra fácilmente que cualquier sustitución es una combinación de transposiciones. Por ejemplo,

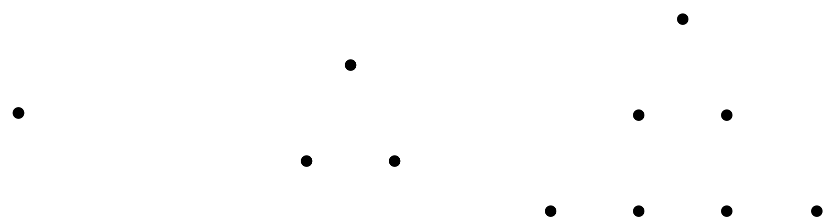
$$(abcdef) = (ab)\,(ac)\,(ad)\,(ae)\,(af)$$

de donde se deduce claramente la regla de escribir cualquier sustitución por medio de transposiciones.

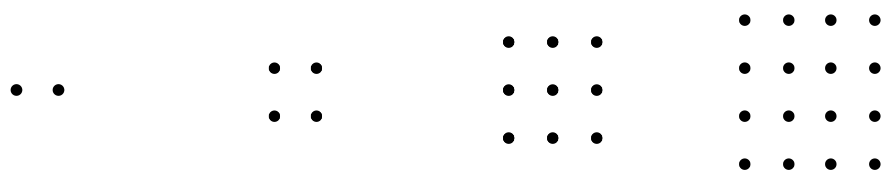
Es una hipótesis razonable suponer que los electrones en un átomo son idénticos, es decir, un electrón no puede distinguirse de otro. Por tanto, si en un átomo dos electrones se intercambian, el átomo permanecerá invariable. Supongamos, para mayor sencillez, que el átomo contiene precisamente tres electrones *a, b, c. Al grupo de sustituciones a, b, c* (para el cual hemos dado la tabla de multiplicación) corresponderán todos los intercambios de electrones que dejan el átomo invariable, como era. De esto hasta las líneas espectrales de la luz emitida por un gas excitado compuesto de átomos parece que existe una gran distancia, pero el paso ha sido dado, y una escuela de especialistas en mecánica cuántica ha encontrado una base satisfactoria para la interpretación de los espectros (y de otros fenómenos asociados con la estructura atómica) en la teoría de grupos de sustitución. Como es natural, Cauchy no pudo prever tales aplicaciones de la teoría que estaba creando, ni tampoco previó su aplicación a los notables enigmas de las ecuaciones algebraicas. Este triunfo estaba reservado para un muchacho de menos de veinte años, como más tarde veremos.

Teniendo veintisiete años (1816), Cauchy se colocó en la primera fila de los matemáticos de su época. Su único rival serio era el reticente Gauss, doce años mayor que él. La memoria de Cauchy, de 1814, sobre la integral definida con un número complejo como límite, inició su gran carrera como creador independiente y como inigualado reformador de la teoría de funciones de variable compleja. Para los términos técnicos remitimos al lector al capítulo sobre Gauss, quien llegó al teorema fundamental en 1811, tres años antes que Cauchy. La detallada memoria de Cauchy sobre la cuestión fue publicada en 1827. El retraso fue debido posiblemente a la extensión de la obra, aproximadamente 180 páginas. Cauchy no podía pensar en obras muy extensas, pues la Academia o la Politécnica disponían de muy escasos fondos para imprimirlas.

El año siguiente (1815) Cauchy produjo una gran conmoción al demostrar uno de los grandes teoremas que Fermat había legado a la posteridad: Todo número entero positivo es una suma de tres "triángulos", cuatro "cuadrados", cinco "pentágonos", seis "hexágonos", y así sucesivamente; el cero en cada caso es contado como un número del tipo correspondiente. Un "triángulo" es uno de los números 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...obtenidos construyendo triángulos regulares (equiláteros) mediante puntos,



etc.; los "cuadrados" se construyen de un modo análogo, donde se aprecia evidentemente la manera de obtener cada cuadrado del anterior.



De modo análogo, los "pentágonos" son pentágonos regulares construidos por puntos; y lo mismo para los "hexágonos" y para el resto. Esto no era fácil de demostrar. En efecto, no había sido posible para Euler, Lagrange y Legendre. Gauss lo pudo probar para el caso de los "triángulos". Como si se propusiera demostrar que no se limitaba a los trabajos de Matemática pura, Cauchy obtuvo el Gran Premio ofrecido por la Academia, en 1816, para una "teoría de la propagación de las ondas sobre la superficie de un fluido pesado de profundidad indefinida"; las ondas del océano están cercanas a este tipo para el tratamiento matemático. Este trabajo, cuando fue impreso, llenaba más de 300 páginas. Teniendo 37 años Cauchy fue considerado como candidato a la Academia de Ciencias. Un honor desusado para un hombre tan joven. Le correspondería, según le aseguraban, la primera vacante de la sección Matemática. Por lo que se refiere a su popularidad, la carrera de Cauchy estaba en su punto máximo.

En 1816, Cauchy estaba, pues, maduro para ser elegido académico, pero no había vacantes. De todos modos era de esperar que dos de los sillones quedaran pronto vacíos, dada la edad de sus ocupantes. Monge tenía 70 y L. M. N. Carnot 63 años. De Monge ya hemos hablado; Carnot fue un precursor de Poncelet, y debía su sillón de la Academia a sus investigaciones que restablecieron y ampliaron la Geometría sintética de Pascal y Desargues, y a su heroico intento de colocar el Cálculo sobre un firme fundamento lógico. Aparte de la Matemática, Carnot se había hecho un nombre envidiable en Francia por ser quien, en 1793, organizó 14 cuerpos de ejército para derrotar al medio millón de tropas lanzadas contra Francia por los reaccionarios antidemocráticos unidos de Europa. Cuando Napoleón se apoderó del Poder en 1796, Carnot se opuso al tirano: "Soy un enemigo irreconciliable de todos los reyes", dijo Carnot. Después de la campaña rusa de 1812, Carnot ofreció sus servicios como soldado, pero con una condición: combatiría por Francia, no por el Imperio francés de Napoleón.

En la reorganización de la Academia de Ciencias durante el movimiento político de los Cien Días gloriosos de Napoleón, después de que éste escapó de la isla de Elba, Carnot y Monge fueron expulsados. El sucesor de Carnot ocupó su sillón sin que nada se dijera, pero cuando el joven Cauchy se sentó tranquilamente en el sillón de Monge, la tormenta estalló. La expulsión de

Monge fue una indecencia política, y quien se aprovechara de ello demostraba, al menos, no poseer una fina sensibilidad. Cauchy, sin embargo, creía firmemente en sus derechos y obedecía a su conciencia.
Se dice que el hipopótamo tiene un tierno corazón, y así lo afirman los que han probado ese delicado manjar, de modo que una gruesa piel no es necesariamente un índice en el que pueda confiarse para juzgar el interior de un hombre. Rindiendo culto a los Borbones y creyendo que la dinastía significaba la directa representación que los cielos enviaban para gobernar a Francia, hasta cuando el enviado del cielo era un payaso como Carlos X, Cauchy creía ser leal a los cielos y a Francia cuando ocupó el sillón de Monge. Su conducta posterior con el santificado Charles demuestra que era sincero cuando procedió así.
Posiciones honrosas e importantes le fueron ofrecidas al más grande matemático de Francia antes de que cumpliera los 30 años. Desde 1815 (cuando tenía 26 años), Cauchy explicaba Análisis en la Politécnica. Ahora era ya profesor, y no pasó mucho tiempo sin que fuera también nombrado miembro del Colegio de Francia y de la Sorbona. Todas las cosas seguían su rumbo. Su actividad matemática era increíble, y algunas veces presentó ante la Academia, en la misma semana, dos largos y documentados trabajos. Aparte de sus propias investigaciones, escribió numerosos informes sobre los trabajos que otros autores presentaban a la Academia, y encontró tiempo para mantener una corriente constante de pequeños estudios referentes a todas las ramas de la Matemática pura y aplicada. Llegó a ser más conocido que Gauss por los matemáticos de Europa. Tanto los sabios como los estudiantes acudían a oír sus bellas y claras exposiciones de las nuevas teorías que habían creado, particularmente en el análisis y en la física matemática. Entre sus oyentes, se encontraban matemáticos bien conocidos de Berlín, Madrid y San Petersburgo.
En medio de este trabajo, Cauchy encontró tiempo para el amor. Su prometida, Aloise de Bure, con quien se casó en 1818 y con la que vivió casi 40 años, era la hija de una antigua y culta familia, y también una ardiente católica. Tuvo dos hijas que fueron educadas como Cauchy lo había sido.
En este período debe hacerse notar una gran obra. Alentado por Laplace y otros sabios, Cauchy, en 1821, redactó para su publicación el curso de conferencias sobre Análisis que había pronunciado en la Politécnica. Esta es la obra donde se establece el rigor matemático. También en nuestros días las definiciones de Cauchy de límite y de continuidad, y mucho de lo que escribió acerca de la convergencia de series infinitas en este curso de conferencias, se encuentran reproducidas en cualquier libro que trate de Cálculo infinitesimal. Algunos párrafos del prólogo muestran lo que Cauchy pensaba y lo que realizó. "He intentado dar a los métodos [del Análisis] todo el rigor que se exige en Geometría, de tal forma que jamás haya que referirse a las razones deducidas de la generalidad del Álgebra (actualmente diríamos el formalismo del Álgebra). Razones de este tipo, aunque de ordinario admitidas, sobre todo en el paso de las series convergentes a las divergentes y de las cantidades reales a las imaginarias, tan sólo pueden ser consideradas, en mi opinión, como inducciones, que algunas veces sugieren la verdad, pero que no están siempre de acuerdo con la pretendida exactitud de la Matemática. Debemos también observar que tienden a atribuir una validez indefinida a las fórmulas algebraicas[2], aunque, en realidad, la mayoría de estas fórmulas sólo subsisten bajo ciertas condiciones, y para ciertos

---

[2] Por ejemplo, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ hasta el infinito, obtenido dividiendo 1 por (1 – x), carece de sentido si x es un número positivo igual 0 mayor que 1.

valores de las cantidades que contienen. Determinando estas condiciones y valores, y fijando precisamente la significación de las notaciones de que hago uso, eliminaré toda inseguridad".

La fecundidad de Cauchy era tan prodigiosa que tuvo necesidad de redactar una especie de diario, que denominó *Exercises de Mathéma*tiques (1826-1830) y que continuó en una segunda serie denominada *Exercises d'Analyse Mathématique et de Physique*, para la publicación de sus obras originales de Matemática pura y aplicada. Estos trabajos han sido ardientemente buscados y estudiados, y contribuyeron en mucho a reformar los gustos matemáticos antes de 1860.

Un aspecto de la terrible actividad de Cauchy es bastante divertido. En 1835 la Academia de Ciencias comenzó a publicar su boletín semanal. (Los *Comptes rendus*). Aquí Cauchy encontró un terreno virgen, y comenzó a inundar la nueva publicación con notas y largas memorias, algunas veces más de una cada semana. Asombrados por el alto precio de la impresión, la Academia dictó una medida, que subsiste actualmente, prohibiendo la publicación de artículos de más de cuatro páginas. Esta medida mutiló el estilo brillante de Cauchy, y sus largas memorias, incluyendo una muy extensa de 300 páginas sobre la teoría de números, fueron publicadas en otra parte.

Feliz en su matrimonio y tan prolífico en sus investigaciones como salmón en la época del desove, Cauchy se sentía satisfecho cuando la revolución de 1830 destronó a su amado Carlos. El destino jamás lanzó una carcajada más sincera que cuando Cauchy abandonó el sillón de Monge en la Academia para seguir a su amado rey en el exilio. Cauchy no podía desobedecer al destino: había hecho un solemne juramento de fidelidad a Carlos, y para Cauchy un juramento era un juramento, aun cuando el juramento fuera una estupidez. Cauchy, a la edad de 40 años, renunció a todos sus cargos y se sometió a un exilio voluntario.

No estaba en realidad apesadumbrado, pues las calles ensangrentadas de París alteraban su sensible estómago. Creía firmemente que el buen rey Carlos no tenía responsabilidad alguna de estos sangrientos acontecimientos.

Dejó su familia en París, pero no renunció a su sillón en la Academia, y Cauchy marchó primeramente a Suiza, buscando distracción en conferencias e investigaciones científicas. Jamás pidió el más leve favor a Carlos, y no se sabe si el exilado rey se dio cuenta de su capacidad de sacrificio por una cuestión de principios. Carlos Alberto, Rey de Cerdeña, algo más inteligente que Carlos, oyó decir que el renombrado Cauchy había abandonado sus cargos y le nombró profesor de Física Matemática en Turín. Cauchy se sintió feliz; aprendió rápidamente el italiano y pronunció sus conferencias en ese idioma.

Debido al exceso de trabajo y a las desazones sufridas cayó enfermo, y con gran disgusto (según escribía a su mujer) se vio forzado a abandonar todos los trabajos durante cierto tiempo. Unas vacaciones en Italia y una visita al Papa le restablecieron completamente y volvió a Turín, pensando en una larga vida dedicada a la enseñanza y a la investigación. Pero entonces, el obtuso Carlos X tuvo noticia de la vida retirada del matemático, e intentando premiar a su leal partidario le hizo un singular disfavor. En 1833 Cauchy fue encargado de la educación del heredero de Carlos, el duque de Burdeos, que por entonces tenía 13 años. Ese cargo, mezcla de institutriz y de tutor elemental, era el que menos podía ambicionar Cauchy. De todos modos, por su fidelidad a Carlos, le siguió a Praga cargando sobre sus hombres la cruz de la lealtad. Al año siguiente se unió con su familia.

La educación del heredero de los Borbones no era una sinecura. Desde la mañana hasta la noche, con escaso tiempo para las comidas, Cauchy tenía que cuidarse de este mocoso real. No sólo debía repetir las lecciones elementales propias de una escuela ordinaria, sino que Cauchy tenía que cuidar de que el mimado jovenzuelo no se cayera y no se hiriera las rodillas en sus piruetas por el parque. No hay ni que decir que la mayor parte de la instrucción dada por Cauchy consistía

en charlas íntimas sobre la rama particular de filosofía moral tan amada por Cauchy. Afortunadamente Francia decidió desprenderse de los Borbones, y dejar que sus innumerables descendientes constituyeran el premio de la rifa de maridos para las hijas de millonarios.
A pesar de la constante atención prestada a su discípulo, Cauchy se las arregló para continuar trabajando en sus Matemáticas, retirándose a sus habitaciones privadas durante algunos momentos para establecer alguna fórmula o garrapatear algún párrafo. La obra más importante de este período fue su larga memoria sobre la dispersión de la luz, en la que Cauchy intentó explicar el fenómeno de la dispersión (la separación de la luz blanca en luces de colores, debido a la diferente refrangibilidad de las luces coloreadas que componen la blanca), sobre la hipótesis de que la luz es causada por las vibraciones de un medio elástico. Esta obra, de gran interés en la historia de la física, nos muestra la tendencia del siglo XIX a explicar los fenómenos físicos siguiendo normas mecánicas, en lugar de construir simplemente una teoría matemática abstracta que relacione las observaciones. Esta era una desviación de la práctica dominante desde los tiempos de Newton y sus sucesores, y se habían hecho ya ensayos para "explicar" mecánicamente la gravitación.
En la actualidad la tendencia sigue la dirección opuesta hacia una correlación matemática pura y un completo abandono del éter, de los medios elásticos, o de otras "explicaciones" mecánicas más difíciles de comprender que lo que se intenta explicar. Los físicos actualmente parecen haber oído la pregunta de Byron". ¿Quién, pues, explicará la explicación?". La teoría del medio elástico tuvo un largo y brillante triunfo, y también en nuestros días se usan algunas de las fórmulas deducidas por Cauchy de su falsa hipótesis. Pero la teoría misma fue abandonada cuando, como no es raro que ocurra, la técnica experimental refinada y los fenómenos no sospechados (la dispersión anómala en este caso) no estaban de acuerdo con las predicciones de la teoría.
Cauchy abandonó a su discípulo en 1838, cuando Cauchy tenía casi 50 años). Hacía tiempo que los amigos de París le pedían que volviera, y Cauchy se valió de la excusa de las bodas de oro de sus padres para despedirse de Carlos y de su séquito. Por una dispensa especial, los miembros del Instituto (del cual la Academia de Ciencias era y es parte) no estaban obligados a hacer un juramento de fidelidad al gobierno, y por ello Cauchy recuperó su sillón. Por entonces su actividad fue mayor que nunca. Durante los últimos 19 años de su vida escribió más de 500 trabajos de todas las ramas de la Matemática, incluyendo la mecánica, la física y la astronomía. Muchos de esos trabajos eran largos tratados.
De todos modos sus desazones todavía se prolongaron. Cuando se produjo una vacante en el Colegio de Francia, Cauchy fue unánimemente elegido para ocupar la plaza. Pero en este caso no estaba establecida la dispensa, y antes de obtener el cargo Cauchy tenía que pronunciar el juramento de fidelidad. Creyendo que el gobierno había usurpado los derechos divinos de su señor, Cauchy se negó a prestar el juramento. Una vez más tuvo que abandonar sus tareas. Pero el *Bureau des Longitudes* necesitaba de un matemático de su calibre, y fue elegido por unanimidad. Entonces comenzó una divertida guerra entre el barón Cauchy y el Bureau por una parte, y el gobierno por otra. Consciente de que estaba cometiendo una necedad, el Gobierno hizo la vista gorda y Cauchy penetró por la puerta falsa en el Bureau sin prestar al juramento. El desafío al gobierno era indudablemente ilegal, pero no puede decirse que fuera una traición, y Cauchy mantuvo su cargo. Sus colegas del Bureau pusieron en mala situación al gobierno desconociendo su pretensión de que eligiera legalmente sus miembros. Durante cuatro años Cauchy volvió obstinadamente su espalda al Gobierno, y continuó sus trabajos. A este período pertenecen algunas de las contribuciones más importantes de Cauchy a la astronomía matemática. Leverrier, involuntariamente, fue el punto de partida de la labor de Cauchy con su trabajo escrito en 1840 acerca de Pallas. Se trataba de una obra larga repleta de cálculos numéricos que exigiría para su

comprobación un tiempo no menor que el autor había empleado para realizarlo. Cuando la memoria fue presentada a la Academia hubo que buscar a alguien que voluntariamente se prestase a emprender la tarea sobrehumana de comprobar la exactitud de las conclusiones. Cauchy se prestó, pero en lugar de seguir los pasos de Leverrier, encontró caminos abreviados e inventó nuevos métodos que le permitieron comprobar y ampliar el trabajo en un tiempo extraordinariamente corto.

La pelea con el gobierno hizo crisis en 1843, teniendo Cauchy 54 años. El ministro se negó a seguir siendo objeto de la burla pública y exigió que el Bureau realizara una elección para llenar el cargo que Cauchy se negaba a abandonar. Por consejo de sus amigos Cauchy presentó su caso ante el pueblo en una carta abierta. Esta carta es uno de los escritos más finos que Cauchy redactó durante su vida.

Cualquiera sea nuestro pensamiento acerca de su conducta quijotesca por una causa que hasta los reaccionarios sabían perdida para siempre, no podemos menos de respetar la audacia de Cauchy por mantener su pensamiento con dignidad y sin pasión, luchando por la libertad de su conciencia. Se trataba de la antigua lucha por la libertad del pensamiento en un aspecto que no era familiar entonces, pero que es bastante común ahora.

En la época de Galileo, Cauchy no hubiera dudado en arriesgarse a todos los peligros por mantener la libertad de sus creencias; bajo el reinado de Luis Felipe negó el derecho de cualquier gobierno para exigir un juramento de fidelidad que estaba en contra de su conciencia, y tuvo que sufrir todo género de desazones por su audacia. Su posición le ganó el respeto de todos, incluyendo a sus enemigos, y puso al gobierno en una mala posición hasta para los ojos de quienes le sostenían. Por entonces la estupidez de la represión colocó al gobierno en una situación insostenible, al estallar luchas callejeras, asonadas, tumultos, y en fin la guerra civil. Luis Felipe y toda su pandilla fueron expulsados en 1848. Uno de los primeros actos del gobierno provisional fue abolir el juramento de fidelidad. Con rara perspicacia, los políticos se dieron cuenta de que tales juramentos son innecesarios o indignos. En 1852, cuando Napoleón III subió al trono, el juramento fue restablecido, pero por esta época Cauchy había ganado la batalla, y pudo dedicarse a sus lecciones sin prestar juramento. Por ambas partes se comprendió que era inútil el alboroto. El gobierno no le agradeció su liberalidad y Cauchy nada exigió, pero continuó sus conferencias como si nada hubiera sucedido. Desde entonces hasta el fin de su vida fue la gloria principal de la Sorbona.

Entre la inestabilidad oficial y la estabilidad no oficial Cauchy tuvo tiempo para romper lanzas en defensa de los jesuitas. La cuestión era ya vieja, las autoridades que dirigían la educación del Estado insistían en que la enseñanza de los jesuitas desviaba la fidelidad, mientras los jesuitas defendían que la instrucción religiosa constituía la única base sólida para cualquier educación. Cauchy combatió con gran satisfacción en favor de sus aliados. La defensa de sus amigos era conmovedora y sincera, pero no convincente. Siempre que Cauchy se desviaba de las Matemáticas, sustituía la razón por la emoción.

La guerra de Crimea proporcionó a Cauchy su última oportunidad para ponerse a mal con sus colegas, pues fue un propagandista entusiasta en la singular empresa denominada Obra de las Escuelas del Oriente. "Obra" se entiende aquí en el sentido de una determinada "buena Obra". "Era necesario, según los promotores de la Obra en 1855, remediar los desórdenes del pasado, y al mismo tiempo imponer un doble freno a la ambición moscovita y al fanatismo mahometano: por encima de todo preparar la regeneración de los pueblos brutalizados por el Corán..." En una palabra, la guerra de Crimea era una forma de que las bayonetas preparasen el camino para la Cruz. Profundamente impresionado por la indudable necesidad de reemplazar el brutalizador

Corán por algo más humano, Cauchy se dedicó al proyecto "completando y consolidando... la obra de emancipación tan admirablemente comenzada por las armas de Francia".
Los jesuitas, agradecidos por la experta ayuda de Cauchy, le dieron carta blanca para muchos detalles (incluyendo la obtención de subscripciones), necesarios para cumplir "la regeneración moral de los pueblos esclavizados por las leyes del Corán, y el triunfo del Evangelio en torno a la cuna y al sepulcro de Jesucristo sería la única aceptable compensación de los ríos de sangre que se habían derramado" por los franceses, ingleses, rusos, sardos cristianos y los turcos mahometanos en la guerra de Crimea.
Las buenas obras de este carácter son las que dieron lugar a que algunos de los compañeros de Cauchy, que no sentían simpatía con el espíritu piadoso de la religión ortodoxa de la época, le llamaran relamido e hipócrita. El epíteto era completamente inmerecido, pues Cauchy fue uno de los fanáticos más sinceros que han existido.
El resultado de la Obra fue la matanza de mayo de 1860. Cauchy no llegó a vivir el tiempo necesario para ver coronada su labor.
Las reputaciones de los grandes matemáticos están sometidas a las mismas vicisitudes que la de cualquier otro grande hombre. Durante largo tiempo después de su muerte, y también hoy, Cauchy ha sido gravemente criticado por su excesiva y apresurada labor. Su total producción se remonta a 789 trabajos (muchos de ellos muy extensos) que constituyen 24 grandes volúmenes en cuarto. Las críticas de este tipo se ceban más en los hombres que han realizado una extensa labor de poca importancia al lado de obras de primera categoría, que en aquellos individuos que han hecho relativamente poco y ese poco con una originalidad muy relativa. El papel desempeñado por Cauchy en la moderna Matemática puede decirse que fue esencial, y así fue admitido casi unánimemente, aunque a regañadientes, por casi todos. Después de su muerte, especialmente en las últimas décadas, la reputación de Cauchy como matemático ha aumentado incesantemente. Los métodos que propuso, todo su programa, que inaugura el primer período del moderno rigor, y su casi inigualada capacidad de invención han marcado un jalón para la Matemática, que, como ahora podemos ver, será visible durante muchos años del futuro.
Un detalle, al parecer sin importancia, entre las muchas nuevas cosas debidas a Cauchy puede ser mencionado como un ejemplo de su profética originalidad. En lugar de usar la unidad "imaginario" $i = \sqrt{-1}$, Cauchy propuso realizar todo lo que los números complejos realizan en Matemática valiéndose de las congruencias de módulo $i^2 + 1$. Esta memoria fue realizada en 1847 y atrajo poca atención. Sin embargo, es el germen de algo, el programa de Kronecker que está en camino de revolucionar algunos de los conceptos fundamentales de la Matemática. Como esta cuestión será repetida frecuentemente en otros capítulos, nos contentaremos aquí con dicha alusión.
En el trato social, Cauchy era extraordinariamente cortés, por no decir excesivamente untuoso, por ejemplo, cuando se trataba de solicitar suscripciones para algunas de sus obras preferidas. Sus hábitos eran sobrios, y en todas las cosas, salvo la Matemática y la religión, era hombre moderado. Con respecto a la religión carecía del sentido común ordinario. Todo el que se acercaba a él era un candidato para la conversión. Cuando William Thomson (Lord Kelvin), teniendo 20 años, visitó a Cauchy para discutir problemas matemáticos, éste, gastó algún tiempo intentando convertir al catolicismo a su visitante que entonces era un decidido partidario de la iglesia libre escocesa.
Cauchy se vio envuelto en discusiones acerca de la prioridad, pues sus enemigos le acusaban de no jugar limpio. Sus últimos años se vieron amargados por una seria disputa de la que Cauchy

parecía no hacer caso. Pero con su usual obstinación siempre que se trataba de una cuestión de principios, puso las cosas en su lugar con su invencible dulzura y tenacidad.

Otra peculiaridad aumentó la impopularidad de Cauchy entre sus colegas científicos. En las academias y sociedades científicas se supone que un hombre vota por un candidato teniendo en cuenta sus méritos científicos; cualquier otra cosa es considerada como inmoral. Con justicia o injustamente Cauchy fue acusado de votar de acuerdo con sus credos religiosos y políticos. Sus últimos años fueron amargados lo que Cauchy consideraba una falta de comprensión de sus colegas acerca de ésta y de otras flaquezas semejantes. Ninguna de las partes pudo llegar a comprender los puntos de vista de la otra.

Cauchy murió casi inesperadamente, teniendo 68 años, el 23 de mayo de 1857. Creyendo que la vida en el campo mejoraría un catarro bronquial, dejó la ciudad, pero la fiebre que le afectaba resultó fatal. Pocas horas antes de su muerte habló animadamente con el arzobispo de París de las obras de caridad que proyectaba, la caridad era de las cosas que más interesaban a Cauchy. Sus últimas palabras fueron dirigidas al arzobispo: "Los hombres pasan; pero sus obras quedan”

Capítulo Decimosexto
EL COPERNICO DE LA GEOMETRÍA

LOBATCHEWSKY

La teoría de Lobatchewsky era incomprensible para sus contemporáneos, pues parecía contradecir un axioma cuya necesidad está basada tan sólo sobre un prejuicio santificado por millares de años.

Los editores de las obras de Lobatcheswky

Suponiendo que sea exacta la opinión comúnmente aceptada de la importancia de la obra de Copérnico, hay que admitir que el más alto galardón o la más grave condenación humana posible es llamar a otro hombre el "Copérnico" de alguna cosa. Cuando consideremos lo que Lobatchewsky hizo al crear la Geometría no-euclidiana y comprendamos su significación para todo el pensamiento humano del cual la Matemática es sólo una parte pequeña, aunque muy importante, probablemente aceptaremos que Clifford (1845-1879), que era un gran geómetra y bastante más que un simple matemático, no exageró al calificar a Lobatchewsky como "el Copérnico de la geometría".

Nikolas Ivanovitch Lobatchewsky, segundo hijo de un modesto funcionario del gobierno, nació el 2 de noviembre de 1793 en el distrito de Makarief, gobernación de Nijni Novgorod, Rusia. El padre murió cuando Nikolas tenía siete años, dejando a su mujer, Praskovia Ivanovna, el cuidado de sus tres hijos pequeños. Como el sueldo del padre mientras vivió apenas bastaba para mantener a su familia, la viuda quedó en extrema pobreza. Se trasladó a Kazan, donde preparó lo mejor que pudo a sus hijos para ingresar en la escuela, y tuvo la satisfacción de ver cómo uno tras otro ingresaron en el Instituto. Nikolas fue admitido en 1802, teniendo 8 años. Sus progresos fueron enormemente rápidos tanto en la matemática como en los clásicos. A los 14 años estaba preparado para ingresar en la Universidad. En 1807 ingresó en la Universidad de Kazan, fundada en 1805, en donde transcurrieron los siguientes 40 años de su vida como estudiante, profesor ayudante, profesor y finalmente Rector. Deseando elevar la Universidad de Kazan al nivel de las de Europa, las autoridades universitarias habían traído de Alemania distinguidos profesores. Entre éstos se hallaba el astrónomo Littrow, que más tarde fue director del observatorio de Viena. Los profesores alemanes rápidamente reconocieron el genio de Lobatchewsky y le alentaron.

En 1811, teniendo 18 años, Lobatchewsky obtuvo su título después de una breve reyerta con las autoridades universitarias en cuya ira había incurrido por su exuberancia juvenil. Los amigos alemanes de la Facultad le defendieron y obtuvo su título. Por esta época su hermano mayor Alexis estaba encargado de los cursos elementales de Matemática para los funcionarios secundarios del gobierno, y cuando Alexis tomó licencia por enfermedad, Nikolas fue su sustituto. Dos años más tarde, teniendo 21 años, Lobatchewsky fue nombrado "profesor extraordinario", equivalente al profesor asistente de otras Universidades.

El nombramiento de Lobatchewsky como profesor ordinario tuvo lugar en 1816, a la precoz edad de 23 años. Sus deberes eran pesados. Además del curso de Matemática fue encargado de los cursos de astronomía y de física, el primero para sustituir a un colega que disfrutaba de licencia. El extraordinario equilibrio con que realizó su pesada labor hizo de él un candidato para que se le encargaran nuevos trabajos, basándose en la teoría de que un hombre capaz de hacer muchas cosas es capaz de hacer todavía más, y por entonces Lobatchewsky fue nombrado bibliotecario de la Universidad y conservador del Museo de la Universidad donde reinaba un desorden caótico. Los estudiantes suelen ser una masa ingobernable antes de que la vida les enseñe que no se trata simplemente de ganar lo necesario para vivir. Entre los innumerables deberes de Lobatchewsky, desde 1819 hasta la muerte del zar Alejandro en 1825, se contaba el de ser Inspector de todos los estudiantes de Kazan, desde los asistentes de las escuelas elementales hasta los hombres ya hechos que seguían cursos para postgraduados en la Universidad. Esta inspección se refería especialmente a las opiniones políticas de los estudiantes. Podemos imaginar lo ingrato de tal tarea. La habilidad con que Lobatchewsky supo desenvolver para enviar sus informes día tras día y año tras año a sus suspicaces superiores sin ser tachado de benevolencia para el espionaje, y sin perder el sincero respeto y el cariño de los estudiantes, dice más de su capacidad administrativa que todos los honores y medallas que pudiera conferirle el gobierno, y con las que él gustaba adornarse en las ocasiones oportunas.

Las colecciones del Museo de la Universidad constituían un increíble revoltijo. Un desorden análogo hacía prácticamente inutilizable la abundante biblioteca. Lobatchewsky fue encargado de poner orden. Como reconocimiento a sus señalados servicios las autoridades le elevaron al cargo de Decano de la Facultad de Matemática y Física, pero como se olvidaron de votar los fondos necesarios para ordenar la biblioteca y el museo, Lobatchewsky hizo este trabajo con sus propias manos, catalogando, limpiando el polvo, cuidando de las vitrinas, y hasta si era necesario barriendo.

Con la muerte de Alejandro, en 1825, las cosas parecieron mejorar. El funcionario responsable de la maliciosa persecución de la Universidad de Kazan fue eliminado al ser considerado como demasiado corrompido para desempeñar un cargo del gobierno, y su sucesor nombró un conservador profesional para aliviar a Lobatchewsky de sus infinitas tareas de catalogar libros, limpiar el polvo a las muestras de numerales y atacar la polilla de los pájaros disecados. Necesitando apoyo moral y político para su obra en la Universidad, el nuevo conservador influyó para que fuera nombrado Rector Lobatchewsky, cosa que se logró el año 1827. El matemático se hallaba ahora a la cabeza de la Universidad, pero la nueva posición no era una sinecura. Bajo su capaz dirección todo el cuerpo docente fue reorganizado, siendo nombrados nuevos y mejores hombres. La instrucción fue liberalizada, a pesar de la función oficial, la biblioteca adquirió un nivel superior de suficiencia científica, se adquirieron los instrumentos científicos requeridos para la investigación y la enseñanza, se fundó y equipó un observatorio, proyecto acariciado por el enérgico Rector, y la amplia colección mineralógica donde estaban representados todos los minerales de Rusia, fue puesta en orden y constantemente enriquecida.

La nueva dignidad de su rectorado no impidió que Lobatchewsky ayudara manualmente en los trabajos de la biblioteca y del museo cuando era necesario. La Universidad era su vida y la amaba sobre todas las cosas. Poco bastaba para que despojándose del cuello y de la levita se entregara a cualquier labor manual. Se cuenta que un distinguido visitante extranjero, al encontrar al Rector en mangas de camisa, le confundió con un conserje y le pidió le mostrara la biblioteca y las colecciones del museo. Lobatchewsky le mostró los más preciados tesoro añadiendo detenidas explicaciones. El visitante quedó encantado muy impresionado de la gran inteligencia y cortesía de los empleados subalternos rusos. Al despedirse quiso entregarle una pequeña propina pero

Lobatchewsky, ante la admiración del extranjero, rechazó indignado las monedas ofrecidas. Pensando que se trataba de alguna excentricidad del inteligente conserje, el visitante se guardó su dinero. Aquella noche, él y Lobatchewsky volvieron a encontrarse en la cena ofrecida por el gobernador, y en ese momento se presentaron y aceptaron recíprocamente todo género de excusas.

Lobatchewsky creía firmemente en que para hacer bien una cosa hay que saber ejecutarla o comprender como se ejecuta, pues es la única manera de poder criticar el trabajo de los demás de un modo inteligente y constructivo. Como hemos dicho, la Universidad era su vida. Cuando el gobierno decidió modernizar los edificios y añadir un nuevo, Lobatchewsky tomó a su cuidado que la obra fuera realizada del modo más perfecto sin que se derrochasen los fondos votados. Para cumplir esta tarea aprendió arquitectura. Tan grande fue su dominio de la cuestión que los edificios no sólo fueron adecuados para el propósito a que se destinaban, sino que se dio el caso, casi único en la historia, de que fueron construidos con menos dinero que el calculado. Algunos años más tarde (en 1842), un terrible fuego destruyó la mita de la ciudad de Kazan, incluyendo los mejores edificios de la Universidad con su observatorio totalmente equipado, que constituía el orgullo de Lobatchewsky. Pero gracias a la enérgica sangre fría del Rector se salvaron los instrumentos y la biblioteca. Apagado el fuego, Lobatchewsky se entregó a la labor de la reconstrucción, y dos años más tarde no quedaba signo alguno del desastre.

Recordaremos que el año 1842, el año del fuego, fue también el año en que, merced a los buenos oficios de Gauss, fue elegido Lobatchewsky miembro extranjero correspondiente de la Real Sociedad de Göttingen por su creación de la Geometría no-euclidiana. Aunque parezca increíble que un hombre tan excesivamente atareado por la enseñanza y la administración como Lobatchewsky lo estaba, pudiera encontrar tiempo para realizar una obra científica, Lobatchewsky encontró la oportunidad para crear una de las grandes obras maestras de la Matemática y para establecer un jalón en el pensamiento humano. En esa obra trabajó durante 20 o más años. Su primera comunicación pública acerca de ese tema ante la Sociedad Físico-matemática de Kazan, tuvo lugar en 1826. Fue igual que si hubiera hablado en pleno desierto de Sahara. Gauss no oyó hablar de la obra basta el año 1840.

Otro episodio de la atareada vida de Lobatchewsky muestra que no sólo la Matemática consumió su tiempo. La Rusia de 1830 se hallaba en unas condiciones sanitarias tan deplorables como un siglo después, cuando los soldados alemanes, durante la gran guerra, quedaban asombrados al contemplar los infortunados prisioneros rusos. Como era natural, al extenderse la epidemia colérica entre los infelices habitante de Kazan, en los días de Lobatchewsky, prometía reinar allí durante largo tiempo. La teoría infecciosa de los gérmenes era aún desconocida en 1830, aunque los individuos más inteligentes sospechaban ya que la suciedad tenía mucha más intervención en el brote de las pestes que lo que pudiera tener la ira del Señor.

Cuando el cólera invadió Kazan, los sacerdotes hicieron lo que pudieron en favor de aquellas humildes gentes, reuniéndolas en la iglesias para pedirles que unieran sus súplicas, absolviendo a los moribundos y enterrando a los muertos, pero no pensaron que una pala puede también ser útil para más propósitos que el de cavar sepulturas. Dándose cuenta de que la situación de la ciudad era desesperada, Lobatchewsky pidió a sus compañeros que trajeran a sus familias a la Universidad, y luego solicitó, o por mejor decir ordenó, a algunos de sus estudiantes que se unieran a él en una lucha humana y racional contra el cólera. Las ventanas se cerraron herméticamente, se impusieron estrictas medidas sanitarias, y tan sólo se concedieron las salidas necesarias para obtener los alimentos. De los 660 hombres, mujeres y niños así protegidos sólo murieron 16, una mortalidad inferior a 2,5 %. Comparando esta mortalidad con la que tenía lugar en el resto de las gentes que recibían los remedios tradicionales, esa cifra era despreciable.

Podría suponerse que después de todos sus distinguidos servicios en beneficio del Estado y de su reconocimiento como un gran matemático por los profesores europeos, Lobatchewsky recibiría los mayores honores por parte de su gobierno. Imaginar esto no sólo sería pecar de ingenuo, sino que se desobedecería el mandato bíblico "No confiéis en príncipes". Como premio de sus sacrificios y de su lealtad Lobatchewsky fue bruscamente relevado, en 1846, de su cátedra y de su Rectorado. No se dio ninguna explicación de este singular e inmerecido doble insulto. Lobatchewsky tenía 54 años, y su cuerpo y su mente eran más vigorosas que nunca para continuar sus investigaciones matemáticas. Sus colegas protestaron unánimemente contra el ultraje, poniendo en peligro su propia seguridad, pero fueron brevemente informados de que por ser simples profesores, eran constitucionalmente incapaces de comprender los grandes misterios de la ciencia del gobierno.

Esta excusa mal disfrazada abatió a Lobatchewsky. Todavía le fue permitido conservar su estudio en la Universidad. Pero cuando su sucesor, elegido por el gobierno para disciplinar la desafecta facultad, llegó en 1847 para hacerse cargo de su ingrata tarea, Lobatchewsky abandonó toda esperanza de verse repuesto en la Universidad, que debía su importancia casi exclusivamente a sus esfuerzos, y desde entonces sólo apareció contadas veces para asistir a los exámenes. Aunque su vista decayó rápidamente, aun fue capaz de un intenso pensamiento matemático.

Amaba siempre a la Universidad. Su salud se quebrantó al morir su hijo, pero continuó activo con la esperanza de que aun pudiera ser útil. En 1855 la Universidad celebró el cincuentenario de su creación. Para conmemorar este acontecimiento, Lobatchewsky acudió en persona a presentar un ejemplar de su *Pangeometría*, la obra de su vida científica. Este trabajo (en francés y en ruso) no fue escrito por él, sino dictado, pues Lobatchewsky estaba ciego. Pocos meses más tarde murió, el 24 de febrero de 1856, teniendo 62 años.

Para comprender lo que Lobatchewsky hizo debemos examinar en primer término las notables conquistas de Euclides. Hasta hace poco tiempo el nombre de Euclides era prácticamente sinónimo de Geometría elemental. Del hombre poco se sabía, aparte de las dudosas fechas de su nacimiento y muerte. (330-275 a. J. C,). Además de una explicación sistemática de la Geometría elemental, sus Elementos encierran todo lo que se sabía en su época de la teoría de números. La enseñanza de la geometría ha estado inspirada por Euclides durante más de 2200 años. La labor desarrollada en los Elementos parece haber sido sobre todo la de reunir y exponer lógicamente los resultados de sus predecesores y contemporáneos, y su objeto fue hacer una exposición razonada de la Geometría elemental, de tal modo que cualquiera de las proposiciones contenidas pudiera ser referida a los postulados. Euclides no alcanzó su ideal y ni siquiera nada aproximado, aunque durante siglos se creyó que lo había logrado.

El título de Euclides a la inmortalidad está basado en otra cosa que no es la supuesta perfección lógica que todavía suele atribuírsela erróneamente. Es su reconocimiento de que el quinto de sus postulados (su axioma XI) es una pura suposición. El quinto postulado puede anunciarse de muchas maneras equivalentes, cada una de las cuales puede deducirse de las otras por medio de los restantes postulados de la Geometría de Euclides. Posiblemente, el más sencillo de estos enunciados equivalentes es el siguiente: Dada cualquier línea recta *l* y un punto *P*, que no está en *l*, es posible trazar, en el plano determinado por *l* y *P*, tan sólo una línea recta *l'* pasando por *P*, de tal modo que *l'* jamás corte a *l* por más que se prolonguen ambas líneas *l* y *l* en ambos sentidos.

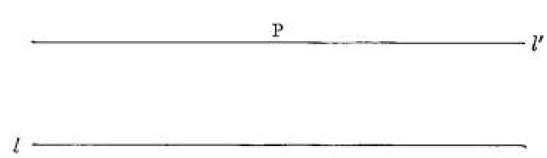


Figura 1.

Como una definición nominal diremos que dos rectas que están en un plano y que no se encuentran son paralelas. Así, el quinto postulado de Euclides afirma que existe una sola línea recta paralela a *l* que pase por *P*. La penetrante visión de Euclides respecto a la naturaleza de la Geometría le convenció de que su postulado no se deducía de los otros, aunque habían sido hechos muchos ensayos para demostrar el postulado. Siendo incapaz de deducir el postulado de sus otras suposiciones, y deseando usarlo en las demostraciones de muchos teoremas, Euclides honradamente lo separó de sus otros postulados.

Existen una o dos simples cuestiones de que debemos tratar antes de ocuparnos de la intervención revolucionaria de Lobatchewsky en el campo de la Geometría. Nos referimos a las proposiciones "equivalentes" al postulado de las paralelas. Una de éstas, "la hipótesis del ángulo recto", según se denomina, sugiere otras dos posibilidades, ninguna de las cuales equivale a la suposición de Euclides: una de ellas lleva a la Geometría de Lobatchewsky, la otra a la de Riemann.

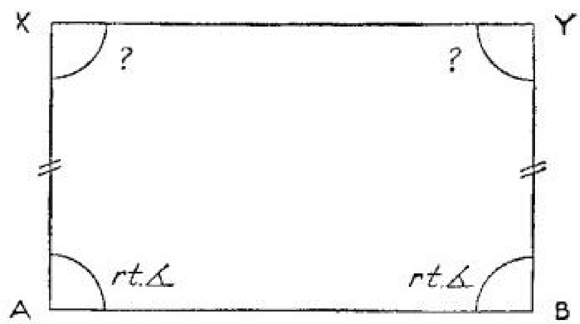


Figura 2

Consideremos una figura *AXYB* que "parece" un rectángulo, compuesta de cuatro segmentos rectos *AX, XY, YB, BA,* en la cual *BA (o AB)* es la base, *AX y YB (o* BY) son iguales y perpendiculares a AB y sobre un mismo lado de *AB.* Las cosas esenciales que hay que recordar acerca de esta figura son que cada uno de los ángulos *XAB, YBA* (en la base) es un ángulo recto, y que los lados *AX, BY* tienen igual longitud. Sin utilizar *el postulado de las paralelas* puede probarse que los ángulos *AXY, BYX son* iguales, pero sin utilizar este postulado es *imposible demostrar que AXY, BYX son ángulos* rectos, aunque lo parezcan. Si aceptamos el *postulado de las paralelas,* podemos demostrar que *AXY, BYX* son ángulos *rectos,* e inversamente, *si aceptamos* que *AXY, BYX* son ángulos *rectos,* podemos demostrar el postulado de las paralelas. Así, la *hipótesis de que AXY, BYX* son ángulos *rectos* es equivalente *al postulado de las paralelas.* Esta hipótesis se llama actualmente la hipótesis del ángulo recto (puesto que ambos ángulos son rectos se usa el singular en vez del plural "ángulos").

Se sabe que la hipótesis del ángulo recto conduce a una Geometría consecuente y prácticamente útil, es decir a la Geometría de Euclides remozada para satisfacer las exigencias modernas del rigor lógico. Pero la figura sugiere otras dos posibilidades: cada uno de los ángulos igua*les AXY, BYX* es menor que un ángulo recto, *hipótesis del ángulo agudo*; cada uno de los ángulos iguales, *AXY, BYB* es mayor que un ángulo recto, *hipótesis del ángulo obtuso*. Dado que un ángulo puede satisfacer a una y sólo a una de las exigencias, que es ser igual a, menor que, o mayor que un ángulo recto, las tres hipótesis, del ángulo recto, del ángulo agudo y del ángulo obtuso, respectivamente, agotan las posibilidades.

La experiencia vulgar nos predispone en favor de la primera hipótesis. Para comprender que las dos restantes no son tan irracionales como parecen a primera vista, consideraremos alguna cosa que está más cerca de la experiencia humana real que el "plano" idealizado en el que Euclides imaginaba trazadas sus figuras. Pero primero observemos que ni la hipótesis del ángulo agudo ni la del ángulo obtuso nos permiten demostrar el postulado de las paralelas de Euclides debido a que, como antes hemos dicho, el postulado de Euclides es equivalente a la hipótesis del ángulo recto (en el sentido de que puede deducirse uno de otra; la hipótesis del ángulo recto es necesaria y suficiente para la deducción del postulado de las paralelas). Por tanto, si conseguimos construir geometrías basándonos en cualquiera de las dos nuevas hipótesis, no encontraremos en ellas paralelas en el sentido de Euclides.
Para hacer a las otras hipótesis menos irracionales de lo que parecen a primera vista, supongamos que la Tierra fuera una esfera perfecta (sin las irregularidades debidas a las montañas, etc.). Un plano trazado a través del centro de esta Tierra ideal corta la superficie según una circunferencia máxima. Supongamos que deseamos ir desde un punto *A* a otro *B* sobre la superficie de la Tierra, manteniéndonos siempre sobre la superficie al pasar desde *A* a *B,* y supongamos además que deseamos hacer el recorrido por el camino más corto posible. Este es el problema de la "navegación según una circunferencia máxima". Imaginemos un plano que pase por *A, B* y el centro de la Tierra (sólo existe un plano que reúne estas condiciones).

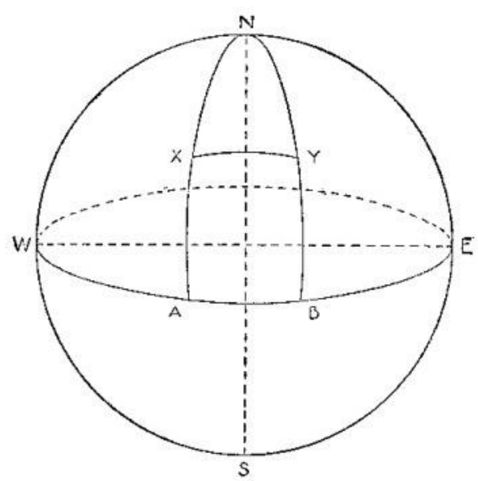


Figura 3.

Este plano corta a la superficie según una circunferencia máxima. Para hacer nuestro viaje más rápido vamos desde A a B siguiendo el arco más corto de los dos arcos de este círculo máximo. *Si A, B* se encuentran en la extremidad de un diámetro, podemos marchar por ambos arcos. 1 El ejemplo precedente introduce la definición importante de *geodésico de* una superficie, que ahora vamos a explicar. Se ha visto que el camino más corto que une dos puntos sobre una esfera, medida la distancia *sobre la superficie,* es un arco de la circunferencia máxima que los une. Hemos visto también que la distancia más *larga* que une los dos puntos es el *otro* arco de la misma circunferencia, salvo en el caso en que los puntos sean los extremos de un diámetro, pues entonces, los dos arcos son iguales. Recordaremos ahora que el segmento de recta que une dos puntos en un plano, se define como "la distancia entre esos dos puntos". Trasladando esta definición a la esfera diremos que la línea recta en el plano corresponde a la circunferencia máxima sobre la *esfera.* Puesto que la palabra griega que significa Tierra es la primera sílaba geo (γη) de geodésico, llamaremos a *todas las líneas de mínima distancia que unen dos puntos* *cualesquiera sobre cualquier superficie las geodésicas de esa superficie.* Así, en un plano las geodésicas son las líneas rectas de Euclides; sobre una esfera son circunferencias máximas. Una geodésico puede ser representada como la posición tomada por una cuerda extendida lo más tirante posible entre dos puntos sobre una superficie.

Ahora bien, en navegación al menos, la superficie de un océano no se considera como una superficie plana (plano euclidiano), aunque las distancias sean cortas; se la considera como lo que es muy aproximadamente, como una parte de la superficie de una esfera, y la Geometría de la navegación según una circunferencia máxima, no es la de Euclides. La de Euclides no es, pues, la única Geometría de utilidad para el hombre. Sobre el plano dos geodésicas se cortan precisamente en un punto, a *no* ser que sean paralelas, pues entonces no se cortan (en Geometría euclidiana); pero sobre la esfera dos geodésicas cualesquiera siempre se cortan precisamente en dos puntos. Además, sobre un plano dos geodésicas no pueden encerrar un espacio, tal como acepta Euclides en uno de los postulados de su Geometría; sobre una esfera, dos geodésicas cualesquiera siempre encierran un espacio.

Imaginemos ahora el ecuador sobre la esfera y dos geodésicas trazadas por el polo norte perpendiculares al ecuador. En el hemisferio norte esto da lugar a un triángulo con lados curvos, dos de los cuales son iguales. Cada lado de este triángulo es un arco de geodésico. Tracemos cualquiera otra geodésica que corte los dos lados iguales, de modo que las partes interceptadas entre el ecuador y la línea secante sean iguales. Tenemos ahora, sobre *la esfera*, la figura de cuatro lados correspondiente a la figura *AXYB* que hace pocos momentos teníamos en el plano. Los dos ángulos en la base de esta figura son ángulos rectos y los lados correspondientes son iguales, como antes, *pero cada* uno de *los ángulos iguales, en X, Y son ahora mayores* que un *ángulo recto.* Así, en la Geometría extraordinariamente práctica de la navegación según una circunferencia máxima que está más cerca de la experiencia humana real que los esquemas idealizados de la Geometría elemental, no es verdadero el postulado de Euclides, o su equivalente en la hipótesis del ángulo recto, sino la Geometría que se deduce de la hipótesis del ángulo obtuso.

De igual modo, inspeccionando una superficie menos familiar, podemos hacer razonable la hipótesis del ángulo agudo. La superficie semeja dos trompetas infinitamente alargadas, soldadas en sus extremos más anchos.

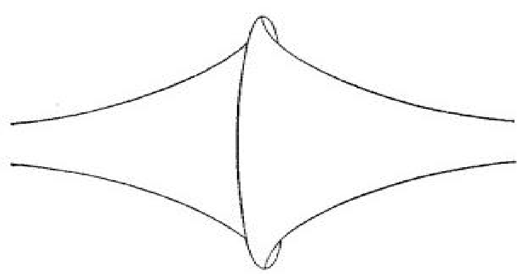


Figura 4.

Para describir esta figura más exactamente debemos introducir la curva plana llamada tractriz, que se engendra del siguiente modo.

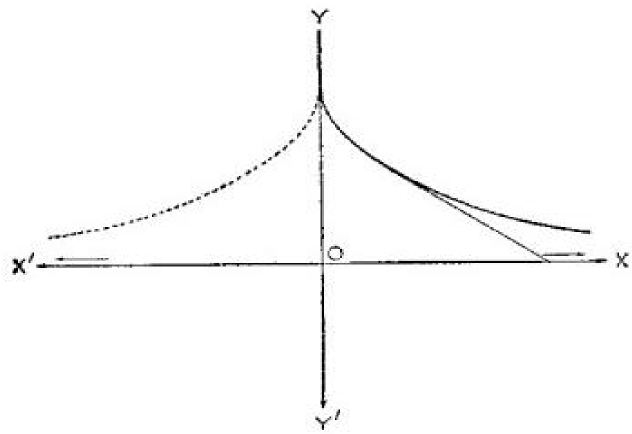


Figura 5.

Tracemos dos rectas *XOX'*, *YOY'* en un plano horizontal, cortándose perpendicularmente en 0, como en la Geometría cartesiana. Imaginemos un hilo flexible e inextensible a lo largo de *YOY'*, que tiene en un extremo una pequeña esfera pesada, estando el otro extremo en O. Llevar ese extremo a lo largo de la línea OX. En su movimiento, la esfera traza una mitad de la tractriz; la otra mitad se traza llevando el extremo del hilo a lo largo de *OX'*, y como se comprende es simplemente la reflexión o imagen en *OY* de la primera mitad. Se supone que el trazado continúa indefinidamente, "hasta el infinito", en cada caso. Ahora imaginemos que la tractriz gira alrededor de la línea *XOX'*. Se engendra la superficie en doble trompeta; por razones que no necesitamos detallar (tiene curvatura negativa constante) se llama una *pseudoesfera*. Si sobre esta superficie trazamos la figura de cuatro lados iguales y dos ángulos rectos como antes, usando geodésicas, encontramos realizada la hipótesis del ángulo agudo.

Así, las hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso y del ángulo agudo respectivamente, son verdaderas sobre un plano euclidiano, sobre una esfera y sobre una pseudoesfera y en todos los casos las "líneas rectas" son *geodésicas*. La Geometría euclidiana es un caso límite o degenerado de la Geometría sobre una esfera, que se alcanza cuando el radio de la esfera se hace infinito.

En lugar de construir una Geometría adaptada a la Tierra que los seres humanos conocemos ahora, Euclides aparentemente partió de la suposición de que la Tierra es plana. Si Euclides no lo hizo, sus predecesores lo hicieron, y por aquella época la teoría del "espacio" o Geometría le llevó a las escuetas suposiciones que enuncia en sus postulados considerados como verdades necesarias e inmutables, reveladas a la humanidad por una inteligencia superior como la verdadera esencia de todas las cosas materiales. Fueron necesarios más de 2000 años para derribar la eterna verdad de la Geometría, y Lobatchewsky lo consiguió.

Para usar la frase de Einstein, Lobatchewsky contradijo un axioma. Quien contradice una "verdad aceptada" que ha parecido necesaria o razonable a la gran mayoría de los hombres durante dos mil años o más, pone en peligro su reputación científica, y quizá su vida. Einstein mismo contradijo el axioma de que dos acontecimientos pueden ocurrir en *diferentes lugares* al mismo *tiempo*, y analizando esta suposición llegó a inventar la teoría especial de la relatividad. Lobatchewsky contradijo la hipótesis del postulado de las paralelas de Euclides o, lo que es equivalente, la hipótesis del ángulo recto, afirmando que no es necesaria para una Geometría consecuente, y fundó su contradicción estableciendo un sistema de Geometría basada sobre la hipótesis del ángulo agudo en la que por un punto dado no sólo puede trazarse una paralela a una recta dada, sino dos. Ninguna de las paralelas de Lobatchewsky corta la línea a la que ambas son paralelas, ni tampoco cualquier línea recta trazada por el punto dado y que está dentro del ángulo formado por las dos paralelas. Esta al parecer extraña situación se "realiza" para las geodésicas de una pseudoesfera.

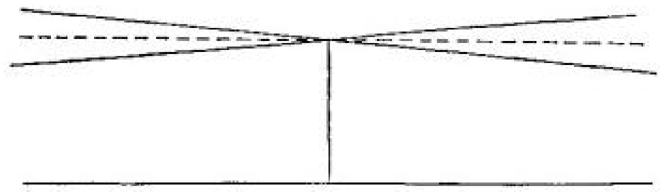


Figura 6

Para cualquier propósito de la vida diaria (medida de distancias, etc.), las diferencias entre las geometrías de Euclides y Lobatchewsky son demasiado pequeñas para ser tenidas en cuenta, pero no es éste el punto importante; cada una tiene importancia por sí misma, y cada una de ella es adecuada para las experiencias humanas. Lobatchewsky abolió la "verdad" necesaria de la geometría euclidiana. Su Geometría fue la primera de las diversas geometrías construidas por sus sucesores. Algunos de estos sustitutos de la Geometría euclidiana, por ejemplo la Geometría de Rieman o de la relatividad general, son hoy, al menos, tan importantes para aquella parte de la ciencia física que se está desarrollando como era la de Euclides en las partes clásicas, relativamente estáticas. Para algunos fines, la Geometría de Euclides es mejor, o al menos suficiente; para otros no es adecuada y se precisa una geometría no euclidiana.

Durante 2200 años se creyó, en cierto sentido, que Euclides había descubierto una verdad absoluta o una forma necesaria de percepción humana en su sistema de Geometría. La creación de Lobatchewsky fue una pragmática demostración del error de esta creencia. La audacia de su oposición y su triunfo han conducido a los matemáticos y a los científicos en general a contradecir otros axiomas o verdades aceptadas, por ejemplo la ley de causalidad que durante siglos pareció tan necesaria para el pensamiento como el postulado de Euclides parecía hasta que fue eliminado por Lobatchewsky.

Es probable que todavía no se haya hecho sentir totalmente la conmoción producida por el método de Lobatchewsky de negar los axiomas. No hay exageración en llamar a Lobatchewsky el Copérnico de la Geometría, pero la Geometría es sólo una parte del más amplio campo que renovó. Por ello sería más justo denominarle el Copérnico de todo el pensamiento.

Capítulo Decimoseptimo
GENIO Y POBREZA

ABEL

He terminado un monumento más duradero que el bronce, y más altivo que las pirámides erigidas por los reyes, que no corroerá la lluvia, ni será destruido por los vientos ingobernados del norte, ni por la infinita sucesión de los años en el correr del tiempo. No moriré completamente; una gran parte de mi escapará a la Muerte y creceré aun lozano entre las alabanzas de la posteridad.

Horacio (Odas 3, XXX).

Un astrólogo del año 1801 podría haber leído en las estrellas que una nueva galaxia de genios matemáticos se estaba formando para inaugurar el siglo más importante de la historia de la Matemática. En toda esa galaxia de talentos no habría una estrella más brillante que Niels Henrik Abel, el hombre de quien Hermite dijo: "Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años".

El padre de Abel era pastor de la pequeña aldea de Findó, en la diócesis de Kristiansand, Noruega, donde su segundo hijo, Niels Henrik, nació el 5 de agosto de 1802. En la familia paterna varios antepasados se habían distinguido en las actividades eclesiásticas, y todos, incluyendo el padre de Abel, eran hombres cultos. Anne Marie Simonsen, la madre de Abel, se distinguió principalmente por su gran 'hermosura, el amor a los placeres y por su carácter caprichoso, una combinación muy notable para ser la compañera de un pastor. Abel heredó de ella su hermosa presencia y el deseo muy humano de gozar de algo que no fueran los duros trabajos cotidianos, deseo que rara vez pudo satisfacer.

El pastor fue bendecido con siete hijos en una época en que Noruega estaba extraordinariamente empobrecida, como consecuencia de las guerras con Inglaterra y Suecia. De todos modos la familia era muy feliz. A pesar de la pobreza, que no siempre les permitía llenar el estómago, se mantenían alegres. Existe un cuadro notable de Abel, siendo ya genio matemático, sentado ante el fuego; el resto de la familia habla y ríe en la habitación, mientras él sigue con un ojo su Matemática, y con el otro a sus hermanos y hermanas. El ruido jamás le distrajo y podía intervenir en la charla mientras escribía.

Como algunos otros de los matemáticos de primera fila, Abel mostró pronto su talento. Un maestro brutal dio lugar involuntariamente a que se abriera el camino para Abel. La educación en las primeras décadas del siglo XIX, era viril, al menos en Noruega. Los castigos corporales, como el método más sencillo de endurecer el carácter de los discípulos y satisfacer las inclinaciones sadistas de los pedagogos, eran generosamente administrados por cualquier travesura. Abel no aprendió en su propia piel, como se dice que Newton aprendió después de los golpes aplicados por un compañero, sino por el sacrificio de otro estudiante, que fue castigado tan brutalmente que murió. Esto era ya demasiado, hasta para los mismos directores de la enseñanza, y el maestro fue relevado de su cargo. Un matemático competente, aunque en modo alguno brillante, llenó la vacante producida. Se trataba de Bernt Michael Holmboë (1795-1850), quien más tarde (1839) publicó la primera edición de las obras completas de Abel.

Abel tenía a la sazón 15 años. Hasta entonces no había mostrado ningún talento particular para nada, salvo el hecho de que tolerara sus disgustos con cierto sentido humorístico. Bajo la cariñosa y clara enseñanza de Holmboë, Abel repentinamente descubrió lo que era. Teniendo 16 años comenzó a leer y a digerir perfectamente las grandes obras de sus predecesores, incluyendo algunas de Newton, Euler y Lagrange. La lectura de estos grandes matemáticos no sólo constituía su ocupación fundamental, sino su mayor deleite. Preguntado algunos años más tarde acerca de cómo pudo colocarse tan rápidamente en primera fila, replicó: "Estudiando a los maestros, no a sus discípulos", una prescripción que algunos autores de libros debían mencionar en sus prefacios como un antídoto de la venenosa mediocridad de su pedagogía mal inspirada.

Holmboë y Abel pronto fueron íntimos amigos. Aunque el maestro no era un matemático creador, conocía y apreciaba las obras maestras de la Matemática, y gracias a sus sugestiones Abel pronto dominó las obras más difíciles de los clásicos, incluyendo las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

En la actualidad es un lugar común decir que muchas de las cosas que los antiguos maestros creyeron haber demostrado no fueron realmente probadas. Esto es cierto particularmente en lo que se refiere a algunos de los trabajos de Euler sobre las series infinitas y a algunos de los de Lagrange, sobre el Análisis. La mente aguda de Abel fue una de las primeras en descubrir las lagunas del razonamiento de sus predecesores, y resolvió dedicar buena parte de su vida a calafatear grietas haciendo riguroso el razonamiento. Uno de sus trabajos en esta dirección es la primera demostración del teorema general del binomio. Aunque ya habían ,;ido tratados por Newton y Euler algunos casos especiales, no es fácil dar una sólida demostración del caso general, de modo que quizá no sea asombroso encontrar supuestas pruebas en algunos manuales, como si Abel no hubiera existido. Dicha *demostración,* sin embargo, fue sólo un detalle en el programa más vasto de Abel de aclarar la teoría y aplicación de las series infinitas.

El padre de Abel murió en 1820, a la temprana edad de 48 años. Abel tenía entonces 18. El cuidado de su madre y de los seis hermanos cayó sobre sus hombros. Confiando en sí mismo, Abel aceptó tranquilo esta responsabilidad. Abel era un alma genial y optimista. Con estricta justicia preveía que llegaría a ser un matemático respetado y que gozaría de ciertas comodidades en una cátedra universitaria. Entonces podría atender a su familia con holgura. Mientras tanto tuvo discípulos privados, y trabajó en lo que pudo. De pasada haremos notar que Abel era un maestro excepcional. Podría haber ganado lo suficiente para sus modestas necesidades, en cualquier cosa y en cualquier momento, pero teniendo a siete personas a su cargo pocas probabilidades tenía de triunfar. Jamás se lamentó de su suerte, se entregó afanosamente a la enseñanza particular, pero dedicó a las investigaciones matemáticas todos los momentos disponibles.

Convencido de que tenía en sus manos a uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, Holmboë hizo cuanto pudo para lograr un subsidio para el joven, y contribuyó tan generosamente como le fue posible con su peculio particular, no muy abundante. Pero el país era pobre hasta el punto de pasar hambre, y casi nada podía hacerse. En aquellos años de privación y de incesante trabajo, Abel se inmortalizó, pero sembró las semillas de la enfermedad que habría de matarle antes de que realizara la mitad de su obra.

La primera aspiración ambiciosa de Abel fue estudiar la ecuación general de quinto grado ("quíntica"). Todos sus grandes predecesores en álgebra habían agotado sus esfuerzos para obtener una solución sin conseguirlo. Podremos imaginar fácilmente la alegría de Abel cuando creyó erróneamente que había triunfado. A través de Holmboë la supuesta solución fue enviada al más docto matemático danés de la época, quien por fortuna para Abel pidió algunos detalles sin comprometer una opinión acerca de la exactitud de la solución. Mientras tanto Abel había encontrado la falla en su razonamiento. La supuesta solución no era de modo alguno la solución. Este fracaso produjo en él una saludable conmoción, poniéndole en el camino exacto al hacerle dudar de si siempre era posible una solución algebraica. *Demostró la imposibilidad*. Por entonces tenía 19 años.

Como esta cuestión de la "quíntica" general desempeña en álgebra un papel análogo al del experimento crucial para decidir el destino de toda una teoría científica, merece un momento de atención. Citaremos ahora algunas de las cosas que el mismo Abel dice.

La naturaleza del problema se explica fácilmente. En los primeros cursos de Álgebra aprendemos a resolver las ecuaciones generales de primero *y* segundo grado con una incógnita *x*, o sea

$$ax + b = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

y algo más tarde las de *tercero y* cuarto grado o sea

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

esto es, establecemos fórmulas finitas (cerradas) para cada una de estas ecuaciones generales de los primeros cuatros grados, expresando la incógnita x en función de los coeficientes dados *a, b, c, d, e*. La solución de una de esas cuatro ecuaciones que se pueden obtener por medio de *un número finito de sumas, multiplicaciones, sustracciones, divisiones y extracción de raíces,* de los coeficientes dados, se llama algebraica. La importante calificación en esta definición de una solución *algebraica* es “finita"; no hay dificultad para encontrar soluciones de cualquier ecuación algebraica que no contenga extracción de raíces, aunque implique una infinidad de las otras operaciones racionales.

Después de este triunfo con las ecuaciones algebraicas de los cuatro primeros grados, los algebristas lucharon durante casi tres siglos para obtener solución algebraica de la ecuación general de quinto grado.

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Fracasaron: entonces intervino Abel.

Vamos a reproducir los siguientes párrafos en parte porque muestran su gran inventiva en el pensamiento matemático y en parte por su interés intrínseco. Corresponden a la memoria de Abel *Sobre la resolución algebraica de ecuaciones.*

«Uno de los problemas más interesantes del Álgebra es el de la solución algebraica de las ecuaciones, y observamos que casi todos los matemáticos distinguidos se han ocupado de este tema. Llegamos sin dificultad a la expresión de las raíces de las ecuaciones de los cuatro primeros grados en función de sus coeficientes. Fue descubierto un método uniforme para resolver estas ecuaciones, y se creyó sería aplicable a las ecuaciones de cualquier grado, pero, a pesar de todos los esfuerzos de Lagrange y de otros distinguidos matemáticos, el fin propuesto no fue alcanzado.

Esto llevó a la creencia de que la solución de las ecuaciones generales era algebraicamente imposible; pero esta creencia no podía ser comprobada, dado que el método seguido sólo llevaba a conclusiones decisivas en los casos en que las ecuaciones eran solubles. En efecto, los matemáticos se proponían resolver ecuaciones sin saber si era posible. Así se podía llegar a una solución, pero si por desgracia la solución era imposible, podríamos buscarla durante una eternidad sin encontrarla. Para llegar infaliblemente a una conclusión debemos por tanto seguir otro camino. Podemos dar al problema tal forma que siempre sea posible resolverlo, cosa que podemos hacer con cualquier problema[1]. En lugar de preguntarnos sí existe o no una solución de relación que no nos es conocida, debemos preguntarnos si tal relación es en efecto posible... Cuando se plantea un problema de esta forma ,el enunciado contiene el germen de la solución e indica el camino que debe seguirse, y yo creo que habrá pocos ejemplos donde seamos incapaces de llegar a proposiciones de más o menos importancia, hasta cuando la complicación de los cálculos impide una respuesta completa al problema".

Abel sigue diciendo que debe seguirse el método científico, per ha sido poco usado debido a la extraordinaria complicación de los cálculos algebraicos que supone. "Pero, añade Abel, en muchos ejemplos esta complicación es sólo aparente y se desvanece en cuanto se ,aborda", y Abel añade: "He tratado de esta forma diversas ramas del Análisis, y aunque muchas veces me he encontrado ante problemas más allá de mi capacidad, he llegado de todos modos a gran número de resultados generales que aclaran la naturaleza de esas cantidades cuya dilucidación es el objeto de las Matemáticas. En otra ocasión mencionaré los resultados a que he llegado en esas investigaciones y el procedimiento que me ha conducido a ellos. En la presente memoria trataré el problema de la solución algebraica de las ecuaciones en toda su generalidad."

Luego presenta dos problemas generales relacionados entre sí que se propone discutir:

1. Encontrar todas las ecuaciones de cualquier grado que sean resolubles algebraicamente.
2. Determinar si una ecuación es o no resoluble algebraicamente.

En el fondo, dice Abel, estos dos problemas son uno mismo, y aunque no pretende una completa solución, *indica* métodos seguros *(des moyens sûrs)* para tratarlos de un modo completo.

La capacidad inventiva de Abel se aplicó a problemas más vastos antes de que tuviera tiempo de volver sobre éste, y su solución completa, el enunciado explícito de las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebraica se pueda resolver algebraicamente, es reservada a Galois. Cuando esta memoria de Abel fue publicada en 1818, Galois tenía 16 años y había iniciado su carrera de descubrimientos fundamentales. Galois conoció y admiró más tarde la obra de Abel, pero es probable que Abel jamás llegase a oír el nombre de Galois aunque cuando Abel visitó París, él y su brillante sucesor tan sólo estaban separados escasos kilómetros.

Aunque la labor de Abel en álgebra marca una época, pasa a un segundo plano por su creación de una nueva rama del Análisis. Esta obra es, como dijo Legendre, el "monumento que resistirá al tiempo". Si la historia de su vida nada añade al esplendor de sus hazañas, al menos nos muestra lo que el mundo perdió cuando Abel murió. Es un relato algo desalentador. Sólo su jovialidad perenne y su valor indomable en la lucha contra la pobreza, así como la falta de aliento por parte de los príncipes de las Matemáticas de su época amenizan la historia. Abel, sin embargo, encontró un generoso amigo, además de Holmboë.

---

[1] *"...ce qu'on peut toujours faire d'un probléme quelconque"* es lo que dice. Esto parece una bagatela demasiado optimista, al menos para los vulgares mortales. ¿Cómo podría aplicarse el método al último teorema de Fermat?

En junio de 1822, cuando Abel tenía 19 años, completó sus estudios en la Universidad de Cristianía. Holmboë hizo todo lo posible por aliviar la pobreza del joven, convenciendo a sus colegas que debían contribuir para hacer posible que Abel continuara sus investigaciones matemáticas. Estos colegas hubieran deseado hacerlo, pero también eran muy pobres. Abel quería salir pronto de Escandinavia, deseaba visitar Francia, la reina matemática del mundo de aquellos días, donde esperaba conocer a las más grandes figuras (Abel se encontraba en realidad por encima de algunas de ellas, pero no lo sabía). Soñaba también con viajar por Alemania y hablar con Gauss, el príncipe indiscutido de todos ellos.
Los matemáticos y astrónomos amigos de Abel persuadieron a la Universidad para que pidiera al gobierno noruego un subsidio con objeto de que el joven pudiera estudiar Matemáticas en Europa. Para impresionar a las autoridades, Abel presentó una extensa memoria, que, a juzgar por su título, estaba probablemente relacionada con las actividades que le dieron más fama. El autor tenía un alto concepto de su obra, y creía que su publicación por la Universidad sería un honor para Noruega. Por desgracia la Universidad luchaba con dificultades económicas y la memoria se perdió. Después de una larga deliberación, el gobierno llegó a un acuerdo, pero en lugar de hacer lo que era sensato, es decir, enviar a Abel inmediatamente a Francia y Alemania, le concedió una pensión para que continuara sus estudios universitarios en Cristianía, con objeto de que perfeccionara su francés y su alemán. Esta era la solución que podía esperarse del sentido común de aquellos importantes funcionarios, pero el sentido común no siempre se aviene con el genio.
Abel trabajó año y medio en Cristianía sin perder el tiempo, pues, durante esos meses, se dedicó a luchar, no siempre triunfalmente, con el alemán y se inició más favorablemente en el francés, pero al mismo tiempo trabajó incesantemente en su matemática. Con su incurable optimismo también se comprometió con una joven, Crelly Kemp. Al fin, el 27 de agosto de 1825, cuando Abel tenía 23 años, sus amigos vencieron la última objeción del gobierno y un real decreto le concedió los fondos suficientes para viajar y estudiar durante un año en Francia y Alemania. No le concedieron mucho, pero el hecho de que le dieran algo, a pesar de las malas condiciones financieras del país, dice más en favor del estado de civilización de Noruega en 1825 que toda una enciclopedia de artes e industrias. Abel estaba muy agradecido. Tardó cerca de un mes en arreglar sus asuntos antes de partir, pero trece meses antes, creyendo inocentemente que todos los matemáticos eran tan generosos como él, ganó un escalón antes de haber puesto los pies en él.
De su propio bolsillo, sólo Dios sabe cómo, Abel pagó la impresión de la memoria en que demostraba la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación general de quinto grado. Era una impresión muy defectuosa, pero la mejor que podía obtenerse en Noruega en aquella época. Abel creyó ingenuamente que esta memoria sería su pasaporte científico para los grandes matemáticos del continente. Esperaba que particularmente Gauss reconocería los grandes méritos de la obra, concediéndole una larga entrevista. No podía sospechar que “el príncipe de los matemáticos" no siempre mostraba una generosidad principesca para los jóvenes matemáticos que luchaban para que sus méritos fueran reconocidos.
Gauss recibió el trabajo, y Abel supo cuál había sido el recibimiento que le dispensó. Sin dignarse leerlo lo arrojó a un lado exclamando: "He aquí otra de esas monstruosidades". Abel resolvió no visitar a Gauss. Después de este suceso sintió gran antipatía por él, antipatía que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Abel afirma que Gauss escribía confusamente e insinúa que los alemanes le consideraban en más de lo que valía. No es posible decir quien de los dos, Gauss o Abel, perdió más por esta antipatía perfectamente comprensible.
Gauss ha sido muchas veces censurado por su "orgulloso desprecio"; en esta ocasión, pero quizás sean palabras demasiado fuertes para calificar su conducta. El problema de la ecuación general de quinto grado era muy conocido. Y tanto los matemáticos reputados como los aficionados a la

Matemática se habían ocupado de él. Si en la actualidad cualquier matemático recibiera una supuesta prueba de la cuadratura del círculo, podría o no escribir una cortés carta para acusar recibo, pero es casi seguro que el manuscrito sería arrojado al cesto de los papeles, pues todos los matemáticos saben que Lindemann, en 1882, demostró que es imposible cuadrar el círculo valiéndose tan sólo de la regla y el compás, los únicos instrumentos que manejan los aficionados y de los que también se valió Euclides. Se sabe también que la demostración de Lindemann es accesible a cualquiera. En 1824, el problema de la quíntica general estaba casi a la par del problema de la cuadratura del círculo. Esto explica la impaciencia de Gauss. Recordaremos, sin embargo, que la imposibilidad no había sido aún probada, y el trabajo de Abel proporcionaba la demostración. Si Gauss hubiera leído algunos párrafos seguramente que la memoria le habría interesado y habría sido capaz de refrenar su temperamento. Es una lástima que no lo hiciera. Una palabra de Gauss y los méritos de Abel habrían sido reconocidos. También es posible que su vida se hubiera prolongado, como veremos cuando hayamos expuesto toda su historia.

Después de dejar su hogar, en septiembre de 1825, Abel visitó primeramente a los más notables matemáticos y astrónomos de Noruega y Dinamarca, y luego, en lugar de apresurarse a ir a Göttingen para conocer a Gauss, como era su propósito, marchó a Berlín.

Allí tuvo la inmensa fortuna de encontrarse con un hombre, August Leopold Crelle (1780-1856) que iba a ser para él un segundo Holmboë y que tenía mucho más peso en el mundo matemático de lo que tenía el generoso noruego. Pero si Crelle ayudó a que Abel lograra una reputación, éste le pagó ayudándole para que aumentara Crelle la suya. Para los que actualmente cultivan la Matemática, el nombre de Crelle es familiar, pues esa palabra, más que el nombre de un individuo, significa el gran periódico que fundó, y cuyos tres primeros volúmenes contienen 22 trabajos de Abel. El periódico permitió que Abel fuera conocido, o al menos más ampliamente conocido por los matemáticos del continente que hubiera podido serlo sin él. La gran obra de Abel inició el periódico tan estrepitosamente, que este estrépito fue oído por todo el mundo matemático, y finalmente el periódico labró la reputación de Crelle. Este aficionado a las Matemáticas merece algo más que una simple mención. Su capacidad para los negocios y su seguro instinto para elegir colaboradores que fueran verdaderos matemáticos, hicieron más por el progreso de las Matemáticas en el siglo XIX que media docena de doctas academias.

Crelle era un autodidacto amante de la Matemática más que un matemático creador. Su profesión era ingeniero civil. Llevó a la cima su obra al construir el primer ferrocarril en Alemania, lo que le proporcionó abundantes ingresos. En sus horas de ocio se dedicaba a la Matemática, que fue para él más que una simple diversión. Contribuyó a la investigación matemática antes y después de haber fundado, en 1826, su *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Periódico para la Matemática pura y aplicadaa), que fue un gran estímulo para los matemáticos alemanes. Esta es la gran contribución de Crelle al progreso de la Matemática.

Esta revista fue el primer periódico del mundo dedicado exclusivamente a la investigación matemática. Las exposiciones de las obras antiguas no eran bien recibidas. Los trabajos eran aceptados cualquiera fuera su autor, siempre que la cuestión fuera nueva, verdadera y de "importancia" suficiente, una exigencia intangible, para merecer la publicación. Desde 1823 esta revista apareció regularmente cada tres meses, y la palabra "Crelle" sigue siendo familiar para todos los matemáticos. En el caos después de la primera guerra mundial el "Crelle" estuvo a punto de derrumbarse, pero fue sostenido por suscriptores de todo el mundo que no se resignaban a que se perdiera este gran monumento de una civilización más tranquila que la nuestra. Actualmente existen centenares de periódicos dedicados, totalmente o en considerable parte, al progreso de las Matemáticas puras y apliWas.

Cuando Abel llegó a Berlín en 1825, Crelle estaba pensando en lanzarse a esta gran aventura con sus propios medios económicos y Abel tuvo una parte en que tomara la decisión. Existen dos relatos acerca de la primera visita de Abel a Crelle, ambos interesantes. Por aquella época Crelle desempeñaba un cargo del gobierno para el que tenía poca aptitud y menos gusto: el de examinador del Instituto de Industria *(Gewerbe-Institut)* en Berlín. El relato de Crelle, de tercera mano (Crelle a Weierstrass y éste a Mittag-Leffler), de esta visita histórica es el siguiente:
"Un buen día, un joven muy desconcertado, con un rostro juvenil e inteligente, penetró en mi habitación. Creyendo que se trataba de un candidato para ingresar en el Instituto le expliqué que eran necesarios diversos exámenes. Al fin, el joven abrió su boca y dijo en muy mal alemán: "No exámenes, sólo Matemáticas".
Crelle vio que Abel era extranjero e intentó hablarle en francés, que Abel comprendía con alguna dificultad. Crelle le preguntó entonces qué labor había hecho en la Matemática. Con diplomacia Abel replicó que había leído, entre otras cosas, el trabajo de Crelle de 1823, recientemente publicado, sobre ' 'facultades analíticas" (ahora llamadas "factoriales"). Dijo que la obra le había parecido muy interesante, pero, ya no tan diplomáticamente, señaló aquellas partes de la obra que estaban equivocadas. Fue aquí donde Crelle mostró su grandeza. En lugar de enfurecerse por la osada presunción de aquel joven, aguzó su oído, y le preguntó nuevos detalles que siguió con la mayor atención. Durante largo rato hablaron de Matemática, aunque tan sólo algunas partes de ella eran inteligibles para Crelle. Pero entendiera o no todo lo que el visitante le dijo, Crelle vio claramente lo que Abel era. Crelle jamás pudo comprender una décima parte de lo que Abel sabía, pero su seguro instinto le afirmaba que Abel era un matemático de primera categoría e hizo todo lo que estaba en su mano para que su joven protegido fuera conocido. Antes de que terminara la entrevista, Crelle había pensado que Abel sería uno de los primeros colaboradores del proyectado Journal.
El relato de Abel difiere, aunque no esencialmente. Leyendo entre líneas podemos ver que las diferencias se deben a la modestia de Abel. Al principio Abel temió que su proyecto de interesar a Crelle estaba destinado a caer en el vacío. Crelle no comprendía lo que el joven deseaba, ni sabía quién era, pero en cuanto Crelle le preguntó qué había leído en cuestiones matemáticas, la situación se aclaró considerablemente. Cuando Abel mencionó las obras de los maestros que había estudiado, Crelle prestó inmediatamente atención. Tuvieron una larga charla sobre diversos problemas importantes, y Abel se aventuró a hablar de su demostración de la imposibilidad de resolver algebraicamente la quíntica general. Crelle no había oído hablar de tal demostración y debía haber en ella algo equivocado. Pero aceptó un ejemplar del trabajo, lo hojeó, y, admitiendo que los razonamientos estaban más allá de su capacidad, publicó la prueba ampliada de Abel en su Journal. Aunque era un matemático limitado, sin pretensiones de grandeza científica, Crelle era un hombre de mente amplia, un verdadero gran hombre.
Crelle llevó a Abel a todas partes, considerándolo como el mayor descubrimiento matemático que había hecho. El autodidacto suizo Steiner, "el más grande geómetra después de Apolonio", acompañaba algunas veces a Crelle y Abel en sus paseos. Cuando los amigos de Crelle le veían llegar con estos dos genios, exclamaban: "Ahí viene el padre, Adán con Caín y Abel".
La generosa sociabilidad de Berlín comenzó a distraer a Abel de su trabajo, y entonces marchó a Friburgo donde pudo concentrarse. Fue allí donde tomó cuerpo su obra máxima, la creación de lo que ahora se llama el teorema de Abel, pero tenía que marchar a París para conocer a los más grandes matemáticos franceses de la época: Legendre, Cauchy, etc.
Puede decirse que la recepción dispensada a Abel por los matemáticos franceses fue tan cortés como podía esperarse de distinguidos representantes de un pueblo muy cortés, en una época extraordinariamente cortés. Todos ellos fueron muy corteses con él, y esto es todo lo que obtuvo

Abel de la visita en que había puesto tan ardientes esperanzas. Como es natural no llegaron a conocerle, ni supieron quién era, pues tampoco hicieron verdaderos esfuerzos para descubrir su personalidad. Si Abel abría la boca acerca de su propia obra, ellos, manteniéndose a cierta distancia, comenzaban inmediatamente a platicar acerca de su propia; grandeza. Si no hubiera sido por su indiferencia, el venerable Legendre hubiera sabido ciertas cosas acerca de la pasión de su vida (las integrales elípticas) que le hubieran interesado extraordinariamente. Pero fue en el preciso momento en que subía a su carruaje cuando Abel le encontró, y sólo tuvo tiempo para saludarle cortésmente. Más tarde le presentó rendidas excusas.

En julio de 1826, Abel se alojó en París con una pobre pero codiciosa familia que le proporcionaba dos malas comidas por día y un inmundo aposento a cambio de un alquiler bastante elevado. Transcurridos cuatro meses de permanencia en París, Abel escribía sus impresiones a Holmboë:

> *París, 24 de Octubre de 1826.*
>
> *"Te diré que esta ruidosa capital del continente me ha producido por el momento el efecto de un desierto. Prácticamente no conozco a nadie, a pesar de hallarnos en la más agradable estación cuando todos se hallan en la ciudad ... Hasta ahora he conocido a Mr. Legendre, a Mr. Cauchy y a Mr. Hachette y a algunos matemáticos menos célebres, pero muy capaces: Mr. Saigey, editor del Bulletin des Sciences y Mr. Lejeune-Dirichlet, un prusiano que vino a verme el otro día creyéndome compatriota suyo. Es un matemático de gran penetración. Con Mr. Legendre ha probado la imposibilidad de resolver la ecuación*
>
> $$x^5 + y^5 = z^5$$
>
> *en enteros, y otras cosas importantes. Legendre es extraordinariamente cortés, pero desgraciadamente muy viejo. Cauchy está loco... lo que escribe es excelente, pero muy confuso. Al principio no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con mayor claridad... Cauchy es el único que se preocupa de Matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, etc., trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras cuestiones físicas. Mr. Laplace creo que ahora no escribe nada. Su último trabajo fue un complemento a su teoría de las probabilidades. Muchas veces le veo en el Instituto. Es un buen sujeto. Poisson, es un agradable camarada; sabe como comportarse con gran dignidad; Mr. Fourier, lo mismo, Lacroix es muy viejo. Mr. Hachette va a presentarme a algunos de estos hombres.*
>
> *"Los franceses son mucho más reservados con los extranjeros que los alemanes. Es extraordinariamente difícil obtener su intimidad, y no me aventuro a presentar mis pretensiones. En fin, todo principiante tiene aquí grandes dificultades para hacerse notar. Acaba de terminar un extenso tratado sobre cierta clase de funciones transcendentes [su obra maestra] para presentarlo al Instituto [Academia de Ciencias], en la sesión del próximo lunes. Lo he mostrado a Mr. Cauchy pero apenas se ha dignado mirarlo. Me aventuro a decir sin jactancia que es una obra de importancia. Tengo curiosidad por oír la opinión del Instituto y no dejaré de comunicártela..."*

Luego cuenta lo que está haciendo, y añade un resumen de sus proyectos no muy optimistas. "Lamento haber pedido dos años para mis viajes, pues año y medio habrían sido suficientes." Abel deseaba abandonar Europa Continental, pues quería dedicar su tiempo a trabajar en lo que había ideado.

> *"Muchas cosas me quedan por hacer, pero en tanto me halle en el extranjero todo lo que haga será bastante malo. ¡Si yo tuviera mi cátedra como el Sr. Kielhau tiene la suya! Mi posición no está asegurada, pero no me inquieto acerca de esto; si la fortuna no me acompaña en una ocasión, quizá me sonría en otra."*

De una carta de fecha anterior dirigida al astrónomo Hansteen, tomamos dos párrafos, el primero relacionado con el gran proyecto de Abel de colocar el Análisis matemático, tal como existía en su época, sobre un fundamento firme, y el segundo mostrando algo de su aspecto humano.

> *"En el análisis superior pocas proposiciones han sido demostradas con un rigor suficiente. En todas partes encontramos el desgraciado procedimiento de razonar desde lo especial a lo general, y es un milagro que est forma de razonar sólo rara vez nos haya llevado a la paradoja. Es en efecto extraordinariamente interesante buscar la razón de esto. Esta razón, en mi opinión, reside en el hecho de que las funciones que hasta ahora se presentan en el Análisis pueden ser expresadas en su mayor parte por potencias... Cuando seguimos un método general ello no es muy difícil [para evitar trampas]; pero tengo que ser muy circunspecto, pues las proposiciones sin prueba rigurosa (es decir sin prueba alguna) se han apoderado de mí en tal grado que constantemente corro el riesgo de usarlas sin nuevo examen. Estas bagatelas aparecerán en el Journal publicado por el Sr. Crelle."*

Expresa luego su gratitud por la forma de ser tratado en Berlín.

> *"Cierto es que pocas personas se interesaron por mí. Pero estas pocas han sido infinitamente cariñosas y amables. Quizá pueda responder en alguna forma a las esperanzas que han puesto en mí, pues es desagradable para un bienhechor ver perderse todos sus esfuerzos."*

Abel cuenta entonces cómo Crelle le pidió que fijara su residencia en Berlín. Crelle estaba utilizando toda su habilidad para colocar al noruego Abel en una cátedra de la Universidad de Berlín. Esta era la Alemania de 1826. Abel era ya tina segura promesa, y se veía en él el sucesor matemático más legítimo de Gauss. Poco importaba que se tratase de un extranjero. Berlín en 1826 deseaba lo mejor que hubiera en matemática. Un siglo más tarde la figura más descollante en la física matemática, Einstein, fue forzada a abandonar Berlín. He aquí el progreso. Pero continuemos con el confiado Abel.

> *"Pensé al principio marchar directamente desde Berlín a París, satisfecho con la promesa de que el Sr. Crelle me acompañaría. Pero el Sr. Crelle tuvo dificultades, y tendré que viajar solo. Estoy constituido de tal modo que no puedo*

> *tolerar la soledad. Cuando estoy solo me hallo deprimido, me siento pendenciero, y tengo poca inclinación para el trabajo. Por tanto me he dicho a mí mismo que sería mucho mejor ir con el Sr. Boeck a Viena, y este viaje me parece injustificado por el hecho de que en Viena hay hombres como Litrow, Burg, y otros, todos ellos excelentes matemáticos; añádase también que será la única ocasión en mi vida de hacer este viaje. ¿Hay algo que no sea razonable en este deseo mío de ver algo de la vida del Sur? Puedo trabajar activamente mientras viajo. Una vez en Viena, existe para ir a París, una vía directa por Suiza. ¿Por qué no ver un poco todas estas cosas? ¡Dios mío! también a mí me gustan las bellezas de la naturaleza como a cualquier otro. Este viaje me hará llegar a París dos meses más tarde, esto es todo. Podré rápidamente recuperar el tiempo perdido. ¿No le parece que este viaje me hará mucho bien?"*

Abel marchó al Sur, dejando su obra maestra al cuidado de Cauchy para que la presentara al Instituto. El prolífico Cauchy estaba entonces muy atareado recogiendo sus propios frutos, y no tenía tiempo para examinar los mejores frutos que el modesto Abel había depositado en su cesta. Hachette, un simple ayudante de matemático, presentó la obra de Abel *Memoria sobre una propiedad general de una clase muy extensa de funciones trascendentes,* a la Academia de Ciencias de París, el 10 de octubre de 1826. Esta es la obra que Legendre calificó más tarde, empleando palabras de Horacio, de "*monumentum aere perennius*", y la labor de quinientos años que, según Hermite, había dejado Abel, a las futuras generaciones de matemáticos. Era una de las más grandes conquistas de la Matemática.

¿Qué sucedió? Legendre y Cauchy fueron nombrados jueces; Legendre tenía 74 años, Cauchy 39. Legendre se quejó, en carta dirigida a Jacobi (5 de abril de 1829), de que "percibimos que la memoria era apenas legible; estaba escrita con una tinta casi blanca y las letras defectuosamente formadas; estuvimos de acuerdo en que el autor debió proporcionarnos una copia más limpia para ser leída". Cauchy se llevó la memoria a su casa, la extravió y todo quedó olvidado.

Para encontrar un parangón con este fenomenal olvido tendríamos ,que imaginarnos a un egiptólogo que perdiera la Piedra Roseta. Tan sólo por un verdadero milagro pudo ser desenterrada la memoria después de la muerte de Abel. Jacobi oyó hablar de ella a Legendre, con quien Abel mantuvo correspondencia después de volver a Noruega, y en una carta fechada el 14 de marzo de 1829, Jacobi exclama: "¡Qué descubrimiento es este de Abel!... ¿Cómo es posible que este descubrimiento, quizá el más importante descubrimiento matemático que ha sido hecho en nuestro siglo, se haya comunicado a su Academia hace dos años y haya escapado de la atención de sus colegas?" Esta pregunta llegó hasta Noruega. Resumiendo esta larga historia diremos que el cónsul noruego en París hizo una reclamación diplomática acerca del perdido manuscrito y Cauchy lo encontró en 1830. Pero hasta el año 1841 no fue impreso en las *Mémoires présentés par divers savants d l'Acad*émie *royale des sciences de l'Institut de France,* vol. 7, pp. 176-264. Para coronar esta epopeya *in parvo* de crasa incompetencia, el editor o el impresor o ambos perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta[2]. La

[2] Libri, un *so¡ disant* matemático, quien vio la obra estando en prensa, añade con permiso de la Academia una relamida nota al pie de página donde reconoce el genio del desgraciado Abel. Este es ya el golpe de gracia. La Academia ,debió exponer todos los hechos o abstenerse. Recordemos a este propósito que los manuscritos y obras de valor en que puso Libri sus manos, tuvieron generalmente, mala suerte.

Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel concediéndole el gran premio de Matemática en unión con Jacobi, pero Abel había muerto.
Los siguientes párrafos de la memoria muestran su objeto:

> "Las funciones transcendentes hasta ahora consideradas por los matemáticos son escasas en número. Prácticamente toda la teoría, de funciones transcendentes se reduce a la de funciones logarítmicas, circulares y exponenciales, funciones que en el fondo forman una sola especie. Tan sólo recientemente se ha comenzado a considerar algunas otras funciones. Entre las últimas, las transcendentes elípticas, algunas de cuyas notables y elegantes propiedades han sido desarrolladas por Mr. Legendre, ocupan el primer lugar. El autor [Abel] considera, en la memoria que tiene el honor de representar a la Academia, una clase muy extensa de funciones, todas aquellas cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes sean funciones racionales de una variable, y ha demostrado para estas funciones propiedades análogas a la de las funciones logarítmicas y elípticas... y ha llegado al siguiente teorema:
>
> *"Si tenemos varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una Y la misma ecuación algebraica, cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable, podemos siempre expresar la suma de cualquier número de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre qtie establezcamos cierto número de relaciones algebraicas entre las variables de las funciones en cuestión.*
> *"El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares consideradas…*

Este teorema se conoce hoy con el nombre de *Teorema de Abel,* cuya demostración no es otra cosa que "un maravilloso ejercicio de Cálculo integrar". Lo mismo que en Álgebra, en Análisis Abel alcanzó su prueba con una soberbia parsimonia. La prueba puede decirse, sin exageración, que está dentro de los alcances de un muchacho de 17 años que haya seguido el primer curso de Cálculo. No hay nada ampuloso en la simplicidad clásica de la prueba de Abel, pero no puede decirse lo mismo de algunas de las ampliaciones y retoques geométricos de la demostración original realizados en el siglo XIX. La prueba de Abel es como una estatua de Fidias; algunas de las otras semejan una catedral gótica y hasta una construcción barroca.
Existen motivos para una posible confusión en el párrafo citado de Abel. Abel sin duda quiso ser amablemente cortés para un anciano que le había protegido, en el mal sentido, cuando le conoció, pero que de todos modos había empleado gran parte de su larga vida de trabajo en un importante problema sin ver lo que había dentro de él. No es cierto que Legendre haya estudiado las funciones elípticas, como las palabras de Abel parecen indicar; lo que ocupó a Legendre gran parte de su vida fueron las *integrales* elípticas, que son tan diferentes de las funciones elípticas, como lo es un caballo del carro del cual tira, y ahí se encuentra precisamente el germen de una de las más grandes contribuciones de Abel a la Matemática. La cuestión es muy sencilla para quien haya seguido un curso elemental de Trigonometría, y para evitar fatigosas explicaciones de cuestiones elementales, las omitiremos en nuestra exposición.
Para quienes han olvidado todo lo que supieron de Trigonometría podemos presentar la esencia, la *metodología* de los progresos de Abel, recurriendo a una analogía. Nos referimos al carro y al

caballo. El conocido proverbio acerca de colocar el carro delante del caballo, explica lo que Legendre hizo. Abel vio que si el carro tiene que moverse hacia adelante, el caballo tendrá que precederle. Mencionaremos otro ejemplo. Francis Galton, en sus estudios estadísticos de la relación entre la pobreza y la embriaguez crónica, fue llevado por su mente imparcial a reconsiderar la forma en que los indignados moralistas valoraban tales fenómenos sociales. En lugar de aceptar que las gentes son depravadas porque beben en exceso, Galton *invirtió su* hipótesis y aceptó provisionalmente que las gentes beben en exceso porque han heredado malas condiciones morales de sus antepasados, en una palabra: beben porque son depravados. Dando de lado todos los consejos moralizadores de los reformadores, Galton se aferraba a una hipótesis científica, no sentimental, a la cual pudo aplicar el razonamiento imparcial de la Matemática. Su trabajo no ha sido aún registrado socialmente. Por el momento nos bastará hacer notar que Galton, como Abel, invirtió su problema, colocando lo de arriba abajo, lo de dentro afuera, lo de atrás adelante, y lo de adelante atrás. Como Hiawatha y sus fabulosos mitones, Galton colocó dentro el lado de la piel y lo de dentro afuera.

Todo esto dista mucho de ser una trivialidad. Era uno de los métodos más poderosos para el descubrimiento (o invención) matemático hasta entonces ideado, y Abel fue el primer ser humano que lo usó conscientemente en sus investigaciones. "Siempre debéis invertir", como Jacobi dijo cuando le preguntaban el secreto de su descubrimiento matemático. Jacobi recordaba lo que Abel y él habían hecho. Si la solución del problema se hace imposible, intentemos invertir el problema. Por tanto, si encontramos incomprensible el carácter de Cardano cuando lo examinamos considerándolo como un hijo de su padre, desplacernos la cuestión, *invirtámosla*, y veamos lo que resulta cuando analicemos al padre de Cardano como el progenitor y creador de su hijo. En lugar de estudiar la "herencia" concentrémonos en la "dotación". Dirijámonos ahora a quienes recuerdan las lecciones de Trigonometría.

Supongamos que los matemáticos han sido tan ciegos que no hayan visto que seno x, coseno x, y las otras funciones trigonométricas *directas* son más sencillas de usar, en las fórmulas de sumas y en otros casos, que las funciones *inversas* $\operatorname{sen}^{-1}x$; $\cos^{-1}x$. Recordemos la fórmula sen $(x + y)$ en función del seno y coseno de x e y y comparémosla con la fórmula $\operatorname{sen}^{-1}(x + y)$ en función de x e y. ¿No es la primera mucho más sencilla, más elegante, más "natural" que la última? Ahora, en el cálculo integral, las funciones trigonométricas *inversas* se presentan naturalmente como integrales definidas de irracionales algebraicas simples (segundo grado); tales integrales aparecen cuando se trata de encontrar la longitud de un arco de círculo por medio del Cálculo integral. Supongamos que las funciones trigonométricas *inversas* se han presentado al *principio* de esta forma. ¿No habría sido "más natural" considerar las *inversas* de estas funciones, es decir las funciones trigonométricas familiares como las funciones dadas que han de ser estudiadas y analizadas? Indudablemente, pero en muchos de los problemas más complicados, el más sencillo de los cuales es el de hallar la longitud del arco de una *elipse* por una integración, las difíciles funciones "elípticas" *inversas* (no "circulares" como para el arco de un círculo) se presentan *primeramente.* Abel vio que *estas* funciones debían ser "invertidas" y estudiadas, precisamente como en el caso de sen x; cos x en lugar de $\operatorname{sen}^{-1}x$; $\cos^{-1}x$. ¿No es esto sencillo? Sin embargo, Legendre, que era un gran matemático, trabajó durante más de *cuarenta años* en sus "integrales elípticas" (las difíciles "funciones inversas" de su problema) sin siquiera sospechar que podría invertir los términos[3]. Esta forma extraordinariamente sencilla de enfocar un problema al parecer

[3] Al atribuir la prioridad a Abel y no a Abel y Jacobi conjuntamente, he seguido la opinión de Mittag-Leffler. Basándome en todo lo publicado estoy convencido de que los derechos de Abel son indiscutibles aunque los compatriotas de Jacobi piensen de otro modo.

sencillo pero profundamente complicado, fue uno de los grandes progresos matemáticos del siglo XIX.
Sin embargo, todo esto no fue más que el comienzo, un tremendo comienzo, como la aurora de Kipling, aparece como un trueno, de lo que Abel hizo con su magnífico teorema y con su obra sobre las funciones elípticas. Las funciones trigonométricas o circulares tienen un solo período real, así sen $(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$, etc., Abel descubrió que las nuevas funciones que resultaban por la inversión de una integral elíptica tienen precisamente dos períodos, cuya razón es imaginaria. Más tarde, los continuadores de Abel en esta dirección, Jacobi, Rosenhaim, Weierstrass, Rieman, y muchos más, penetraron profundamente en el gran teorema de Abel, y extendieron sus ideas descubriendo funciones de *n* variables que tienen *2n* períodos. Abel mismo también explotó sus descubrimientos. Sus sucesores aplicaron toda su obra a la Geometría, a la mecánica, a ciertas partes de la física matemática y a otros campos de la Matemática, resolviendo importantes problemas que sin la obra iniciada por Abel habrían sido insolubles.
Estando aún en París, Abel consultó algunos médicos acerca de lo que él pensaba era un simple catarro persistente. Fue informado de que padecía tuberculosis de los pulmones. Se negó a creerlo y volvió a Berlín para una breve visita. Sus recursos eran muy escasos. Una carta, urgente le trajo, después de algún retraso, un préstamo de Holmboë. No ha de pensarse que Abel fuera un pedigüeño sin intención de devolver lo prestado. Tenía buenas razones para creer que tendría un buen puesto cuando volviera a su patria. Además, todavía le debían dinero. Con el préstamo de Holmboë, Abel pudo seguir viviendo e investigando desde marzo hasta mayo de 1827. Entonces, agotados todos sus recursos, volvió a Cristianía.
Esperaba que todo fuera ya de color de rosa. Seguramente le concederían un cargo universitario. Su genio había comenzado a ser reconocido. Existía una vacante. Abel no había vuelto aún, y Holmboë, aunque con repugnancia, aceptó la cátedra vacante, que él creía debía ser destinada a Abel. Tan sólo después de que el gobierno le amenazó con traer un extranjero si Holmboë no la ocupaba. Holmboë no tuvo, pues, culpa alguna. Se supuso que Holmboë sería mejor maestro que Abel, aunque Abel había demostrado ampliamente su capacidad para enseñar. Los que están familiarizados con la corriente teoría pedagógica americana, alentada por las escuelas de educación profesionales, de que cuanto menos sabe un hombre de lo que tiene que enseñar, mejor lo enseñará, comprenderán la situación perfectamente.
De todos modos las cosas se aclararon. La Universidad pagó a Abel lo que aun le debía por su viaje, y Holmboë le envió discípulos. El profesor de Astronomía, que había obtenido una licencia, sugirió que Abel fuera empleado para realizar parte de obra. Un matrimonio acomodado, los Schjeldrups, le dio alojamiento, tratándole como si fuera su propio hijo. Sin embargo no podía libertarse de la carga de sus familiares. Hasta última hora dependieron de él, no dejándole prácticamente nada para sus necesidades, sin que, a pesar de ello, Abel pronunciara una palabra de queja.
A mediados de enero de 1829 Abel supo que no viviría mucho tiempo. Tuvo una hemorragia que no fue posible ocultarla. "Lucharé por mi vida", gritaba en su delirio. Pero en los momentos más tranquilos, agotado e intentando trabajar, decía: "Igual que un águila enferma que contempla el sol", sabiendo que sus días estaban contados.
Abel pasé sus últimos días en Froland, en el hogar de una familia inglesa donde su prometida (Crelly Kemp) era institutriz. Sus últimos pensamientos fueron para su futura, y refiriéndose a ella, escribía así a su amigo Kielhau. "No es bella; tiene el cabello rojo y es pecosa, pero se trata de una mujer admirable". Era deseo de Abel que Crelly y Kielhau se casaran después de su muerte, y aunque los dos no se habían conocido lo hicieron, según había propuesto Abel semijocosamente. En los últimos días Crelly insistió en cuidar a Abel "para poseer, por lo menos,

estos últimos momentos". En la madrugada del 6 de abril de 1829 murió, teniendo 26 años y 8 meses.

Dos días después de la muerte de Abel, Crelle le escribió diciendo que sus negociaciones habían llegado finalmente a buen fin y que sería nombrado para la Cátedra de Matemática de la Universidad de Berlín.

Capítulo Decimoctavo
EL GRAN ALGORISTA

JACOBI

Hay una tendencia cada vez más pronunciada en el Análisis moderno a sustituir el cálculo por las ideas; de todos modos existen ciertas ramas de las matemáticas donde el cálculo conserva sus derechos.

P. G. Lejeune Dirichlet

El apellido Jacobi aparece frecuentemente en la Ciencia, no siempre refiriéndose al mismo individuo. En el año 1840 un Jacobi muy famoso, M. H. tuvo un hermano relativamente obscuro, C. G. J., cuya reputación era insignificante al lado de la de M. H. Luego la situación se invirtió: C. G. J. es inmortal, mientras que M. H. va hundiéndose rápidamente en la oscuridad del limbo. M. H. adquirió fama como fundador de la galvanoplastía, charlatanismo que estuvo de moda. La fama de C. G. J., mucho más limitada pero mucho más honda, se basa en la Matemática. Durante su vida el matemático fue siempre confundido con su hermano más famoso, o, todavía peor, felicitado por su involuntario parentesco con el charlatán sinceramente engañado. Al fin C. G. J. no pudo resistir más: "Perdón, señora, contestó a una entusiasta admiradora de M. H. que le felicitaba por tener un hermano tan distinguido, pero yo soy mi hermano". En otra ocasión C. G. J. replicó malhumorado,: "Yo no soy su hermano, él es mi hermano".

Carl Gustav Jacob Jacobi nació en Postdam, Prusia, Alemania, el 10 de diciembre de 1804, siendo el segundo hijo de un próspero banquero, Simón Jacobi, y de su mujer (cuyo apellido era Lehmann). Fueron cuatro hermanos, tres varones, Moritz, Carl y Eduard, y una. mujer Therese. El primer maestro de Carlos fue uno de sus tíos maternos, quien enseñó al muchacho las lenguas clásicas y Matemáticas, preparándolo para que ingresara en el Instituto de Postdam, en 1816, cuando tenía 12 años. Desde el principio Jacobi dio pruebas de poseer una "mente universal", según declaró el Rector del Instituto cuando el muchacho salió de él en 1821 para ingresar en la Universidad de Berlín. Como Gauss, Jacobi pudo haber logrado una gran reputación en filología, si no le hubiera atraído más fuertemente la Matemática. Habiendo observado que el muchacho tenía genio matemático, el maestro (Heinrich Bauer) dejó que Jacobi trabajara como quisiera, después de una prolongada reyerta en la que Jacobi se reveló, negándose a aprender la Matemática de memoria y siguiendo reglas.

El desarrollo matemático de Jacobi ofrece en ciertos respectos un curioso paralelo con el de su gran rival Abel. Jacobi también leía a los maestros; las obras de Euler y Lagrange le enseñaron Álgebra y Cálculo y le hicieron conocer la teoría de números. Esta precoz autoinstrucción iba a dar a la primera obra sobresaliente de Jacobi, sobre funciones elípticas, su dirección definida, y

Euler, el maestro de los recursos ingeniosos, encontró en Jacobi su brillante sucesor. Por su aguda capacidad para tratar problemas de Álgebra, Euler y Jacobi no han tenido rival, como no sea el genio matemático hindú Srinivasa Ramanujan, en nuestro propio siglo. Abel también trataba las fórmulas como un maestro, cuando así deseaba, pero su genio fue más filosófico, menos formal que el de Jacobi. Abel está más cerca de Gauss, al insistir acerca del rigor, que lo estaba Jacobi, pues aunque éste no carecía de rigor, su inspiración parece haber sido más formalista que rigorista.

Abel tenía dos años más que Jacobi. Sin saber que Abel había abordado el estudio de la ecuación general de quinto grado, en 1820, Jacobi, en el mismo año, intentó una solución, reduciendo la ecuación general de quinto grado a la forma

$$x^5 - 10q^2 x = p$$

y demostrando que la solución de esta ecuación podía ser deducida de la de una cierta ecuación de décimo grado. Aunque el intento quedó abortado, enseñó a Jacobi una buena cantidad de Álgebra, y constituyó un paso de importancia en su educación matemática. Pero no parece que se le ocurriera, como se le ocurrió a Abel, que la ecuación general de quinto grado no se podía resolver algebraicamente. Esta falta de imaginación o de visión, o como queramos llamarla, por parte de Jacobi es típica de la diferencia entre él y Abel. Jacobi, que tenía una mente objetiva magnífica y cuyo corazón no albergaba celos de ninguna clase dijo, refiriéndose a una de las obras maestras de Abel: "Está por encima de mis elogios y por encima de mis propias obras".

Los estudios de Jacobi en Berlín duraron desde abril de 1821 hasta mayo de 1825. Durante los primeros dos años dedicó su tiempo igualmente a la filosofía, a la filología y a la Matemática. En el seminario filológico Jacobi atrajo la atención de P. A. Boeckh, un renombrado humanista que había publicado, entre otras obras, una excelente edición de Pindaro. Boeckh, felizmente para las Matemáticas, fue incapaz de atraer a su notable discípulo a los estudios clásicos para que constituyeran la disciplina de toda su vida. En Matemática poco era lo que se ofrecía para un estudiante ambicioso, y Jacobi continuó su estudio privado de maestros. Las conferencias universitarias de temas matemáticos eran consideradas por Jacobi como pura charlatanería. En este punto Jacobi era hasta grosero, aunque sabía ser cortés como un buen palaciego cuando quería lograr que algún amigo matemático consiguiera una posición digna de sus méritos.

Mientras Jacobi estaba dedicado a la labor de hacer de sí mismo un matemático, Abel ya había iniciado el camino que habría de conducir a Jacobi a la fama. Abel había escrito a Holmboë el 4 de agosto de 1823, comunicándole que estaba trabajando en las funciones elípticas: "Esta pequeña obra, como recordarás, se ocupa de las inversas de las trascendentes elípticas, y he demostrado alguna cosa [que parece] imposible. He solicitado a Degen que lea tan pronto como pueda desde el principio al fin esta obra, pero no puede encontrar la falsa conclusión ni comprender donde está el error; Dios sabe como voy a salir de esto". Por una curiosa coincidencia Jacobi dirigía su actividad a la Matemática casi precisamente en la época en que Abel escribía esto. La diferencia de dos años en la edad de estos jóvenes (Abel tenía 21 y Jacobi 19) tiene más importancia que dos décadas cuando se llega a la madurez. Abel había partido veloz, pero Jacobi, sin saber que tenía un competidor en la carrera, pronto le alcanzó. La primera gran obra de Jacobi tuvo lugar en el campo cultivado por Abel de las funciones elípticas. Antes de continuar esta descripción haremos un resumen de su atareada vida.

Habiendo decidido dedicarse a la Matemática, Jacobi escribió a su tío Lehmann, refiriéndose a la labor que había emprendido: "El enorme monumento que las obras de Euler, Lagrange y Laplace han levantado exige la fuerza más prodigiosa y el pensamiento más profundo si se desea penetrar en su naturaleza interna, y no simplemente examinarlo superficialmente. Para dominar este monumento colosal y no ser vencido por él se precisa un esfuerzo que no permite reposo ni paz hasta llegar a la cima y contemplar la obra en su integridad. Sólo entonces, cuando se ha comprendido su espíritu, es posible trabajar en paz para completar sus detalles".

Con esta declaración de consciente esclavitud Jacobi llega a ser uno de los más extraordinarios trabajadores en la historia de la Matemática. A un amigo tímido, que se queja de que la obra científica es agotadora y que pone en peligro la salud del cuerpo, Jacobi contesta:

"Es natural. Seguramente que he puesto algunas veces en peligro mi salud por exceso de trabajo, pero ¿qué importa? únicamente las coles carecen de nervios y de pesadumbres. ¿Y qué beneficio sacan de su perfecto bienestar?"

En agosto de 1825 Jacobi recibió su título de doctor en filosofía por una disertación sobre las fracciones simples y problemas afines. No necesitamos explicar la naturaleza de esta cuestión, que no tiene gran interés y puede encontrarse expuesta en el segundo curso de Álgebra o de Cálculo integral. Aunque Jacobi trató el caso general de su problema y mostró un ingenio considerable para resolver fórmulas, no puede decirse que la disertación tuviera gran originalidad, o permitiera suponer el soberbio talento del autor. Al mismo tiempo que obtenía su título de doctor en filosofía, Jacobi terminó su aprendizaje para la función docente.

Después de obtener su título Jacobi pronunció conferencias en la Universidad de Berlín sobre las aplicaciones del Cálculo a las superficies curvas y a las curvas alabeadas, (curvas determinadas por las intersecciones de superficies). Ya de estas primeras conferencias puede deducirse que Jacobi era un maestro innato. Más tarde, cuando comenzó a desarrollar sus propias ideas con una velocidad sorprendente, llegó a ser el maestro matemático más inspirado de su época.

Jacobi parece haber sido el primer matemático que en una Universidad condujo a los estudiantes a la investigación, haciéndoles conocer los últimos descubrimientos y dejando a los jóvenes que vislumbraran la elaboración de los nuevos temas que se presentaban ante ellos. Creía que si un individuo se sumerge en agua helada, aprende a nadar o se ahoga. Muchos estudiosos no intentan resolver nada por su propia cuenta hasta que no han dominado todas las cuestiones relativas al problema y conocen la labor realizada por los otros autores. El resultado es que pocos adquieren la capacidad de trabajar con independencia. Jacobi combatió esta erudición dilatoria, desconfiando de los jóvenes que no se lanzan a hacer algo hasta que creen conocer todo lo hecho, y al referirse a esto solía decir: "Vuestro padre no se habría casado ni vosotros estaríais aquí ahora si él hubiera insistido en conocer a *todas* las mujeres del mundo antes de casarse con una".

Toda la vida de Jacobi estuvo dedicada a la enseñanza y a la investigación, salvo un desagradable paréntesis a que luego nos referiremos, aparte también de los viajes que emprendió para asistir a reuniones científicas en Inglaterra y en el continente o las forzadas vacaciones para recuperar la salud perdida después de un exceso de trabajo.

El talento de Jacobi como maestro le aseguró una posición en la Universidad de Königsberg, en 1826, después de haber permanecido durante seis meses en un cargo semejante en la de Berlín. Un año más tarde, algunos resultados que Jacobi publicó sobre la teoría de números (la reciprocidad cúbica; véase el capítulo sobre Gauss) provocó la admiración de Gauss. Como éste no era un hombre que se emocionara fácilmente, el Ministro de Educación pronto tuvo conocimiento de la obra de Jacobi, y lo colocó a la cabeza de sus colegas para el cargo de profesor asistente, cuando el joven tenía 23 años. Como es natural, los hombres que habían sido pretendientes protestaron contra el ascenso, pero dos años más tarde (1829), cuando Jacobi publicó su primera obra maestra, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* (Nuevos

fundamentos de la teoría de las funciones elípticas), fueron los primeros en decir que se había hecho justicia y felicitaron a su brillante y joven colega.
En 1832 murió el padre de Jacobi. Hasta entonces no tuvo necesidad de trabajar para vivir. Su prosperidad continuó durante cerca de ocho años, pero entonces la fortuna de la familia se derrumbó. Jacobi se vio privado de su capital cuando tenía 36 años, debiendo además atender al cuidado de su madre que había quedado arruinada.
En esta época Gauss seguía observando la actividad fenomenal de Jacobi con un interés mayor que el meramente científico, pues mucho de los descubrimientos de Jacobi coincidían con algunos de los hechos por Gauss durante su juventud, que nunca habían sido publicados. Se dice que también llegaron a conocerse personalmente. Jacobi acudió a visitar a Gauss, aunque no se conservan detalles de la visita, en septiembre de 1839, al volver a Königsberg después de unas vacaciones en Marienbad para recuperar su salud quebrantada por el exceso de trabajo, Gauss parece que temió que el colapso financiero de Jacobi repercutiera desastrosamente sobre sus estudios matemáticos, pero Bessel le tranquilizó: "Por fortuna ese talento no puede ser destruido, pero me hubiera alegrado que conservara la sensación de libertad que asegura el dinero".
La pérdida de su fortuna no tuvo consecuencias sobre los estudios de Jacobi. Jamás se refirió a sus reveses y se mantuvo trabajando como antes. En 1842 Jacobi y Bessel acudieron a la reunión de la *British Association* en Manchester, donde el alemán Jacobi y el irlandés Hamilton se encontraron. Fue una de las grandes glorias de Jacobi continuar la obra de Hamilton sobre dinámica, y en cierto sentido completar lo que el irlandés había abandonado en favor de un fuego fatuo. (Véase más adelante).
En este momento de su carrera Jacobi sintió la repentina tentación de dedicarse a algo más brillante que la simple Matemática. Para no interrumpir la historia de su vida científica, cuando hagamos su exposición, nos ocuparemos en este momento de las singulares desventuras políticas del ilustre matemático.
El año siguiente de volver de su viaje de 1842, Jacobi sufrió un completo derrumbe de su salud por exceso de trabajo. En el año 1840, el progreso de la ciencia en Alemania, estaba en las manos de los príncipes y reyes de los pequeños Estados que al fundirse habrían de dar lugar al Imperio alemán. El buen ángel de Jacobi fue el rey de Prusia, quien parece que comprendió el honor que reportaban al reino las investigaciones de Jacobi. En consecuencia, cuando Jacobi cayó enfermo, el buen rey le concedió las vacaciones necesarias para que pudiera reponerse en el suave clima de Italia. Después de cinco meses en Roma y Nápoles con Borchardt (a quien más tarde conoceremos en compañía de Weierstrass) y Dirichlet, Jacobi volvió a Berlín, en junio de 1844. Podía permanecer en Berlín hasta que su salud se restableciera completamente, pero, debido a los celos, no le fue concedida una cátedra en la Universidad, aunque como miembro de la Academia le era permitido pronunciar conferencias sobre los temas que eligiera. Por otra parte, el rey concedió a Jacobi, de su propio peculio, una pensión de cierta importancia.
Después de esta generosidad por parte del Rey podría pensarse que Jacobi se dedicaría en cuerpo y alma a sus Matemáticas. Pero por el imbécil consejo de su médico, comenzó a mezclarse en política "para beneficiar su sistema nervioso". Nunca fue hecha una prescripción más idiota a un paciente, cuyo padecimiento no se ha podido diagnosticar. Jacobi ingirió la dosis. Cuando el movimiento democrático de 1848 se inició, Jacobi estaba ya maduro para dedicarse a las nuevas tareas. Por el consejo de un amigo, precisamente uno de aquellos que se vieron perjudicados hacía 20 años por el ascenso de Jacobi, el ingenuo matemático salió a la arena de la política, con la misma inocencia con que un virtuoso misionero pone pie en una isla de caníbales.
El partido liberal moderado al que su amigo le condujo pensó en Jacobi como candidato para la elección de mayo de 1848. Pero Jacobi jamás pudo ver el interior del Parlamento. Su elocuencia

ante el partido convenció a los prudentes miembros de que Jacobi no era el candidato apropiado. Pensaron que Jacobi, el protegido del rey, podría ser tan liberal como él suponía, pero era más probable que fuera un contemporizador, un renegado y un embaucador para los realistas. Jacobi refutó estas insinuaciones en un discurso magnífico lleno de lógica irrefutable, olvidando el axioma de que la lógica es la cosa menos importante para un político práctico. Le abandonaron dejándole con un palmo de narices. No fue elegido y sus sistema nervioso poco se benefició porque su candidatura rodara por las cervecerías y bodegas de Berlín.

Pero las cosas no pararon ahí. ¿Quién puede culpar al Ministro de Educación por querer saber, en el mes de mayo, si la salud de Jacobi se había restablecido suficientemente para que pudiera regresar a Königsberg? ¿A quién puede sorprender que la protección del rey fuera suspendida pocos días más tarde? Un rey puede muy bien permitirse esa petulancia cuando la boca que intenta alimentar pretende morderle. De todos modos, la situación de Jacobi era lo suficientemente desesperada para atraer la simpatía de todos. Casado, y prácticamente sin el menor ahorro, tenía siete hijos pequeños que mantener, además de su mujer. Un amigo de Gotha tomó a su cargo a la mujer y a los hijos, y Jacobi permaneció en la sucia habitación de un modesto hotel para continuar sus investigaciones.

Tenía entonces (1849) 45 años y, exceptuando a Gauss, era el matemático más famoso de Europa. Al conocer sus cuitas, la Universidad de Viena pensó en llevarle a su seno y Littrow, el amigo vienés de Abel, tomó una parte esencial en las negociaciones. Cuando al fin le fue hecha una definida y generosa oferta, Alexander von Humbolt habló con el malhumorado rey, y la pensión fue restablecida. Jacobi pudo continuar en Alemania, que así no se vio privada de su segundo gran hombre. Permaneció en Berlín, gozando nuevamente del favor real, pero completamente apartado de la política.

Ya hemos indicado, a propósito de las funciones elípticas, en donde Jacobi realizó su primera gran obra, el puesto que parece corresponderle; después de todo, actualmente tan sólo es un detalle de la teoría más amplia de las funciones de una variable compleja, que a su vez va borrándose de la cambiante escena, al difuminarse su interés. Como la teoría de las funciones elípticas será mencionada varias veces en los capítulos sucesivos, intentaremos hacer una breve justificación de su al parecer inmerecida importancia.

Ningún matemático puede discutir la pretensión de que la teoría de las funciones de una variable compleja ha sido uno de los campos esenciales de la Matemática del siglo XIX. En este lugar puede hacerse mención de una de las razones de que esta teoría haya tenido tal importancia. Gauss ha demostrado que los números complejos son necesarios y suficientes para demostrar que una ecuación algebraica cualquiera tiene una raíz. ¿Son posibles otros tipos más generales de números"? ¿Cómo pueden surgir tales "números"?

En vez de considerar los números complejos como presentándose por sí mismos en el intento de resolver ciertas ecuaciones sencillas, por ejemplo

$$x^2 + 1 = 0,$$

podemos ver también su origen en otro problema de Álgebra elemental. El de la *factorización.* Para descomponer

$$x^2 - y^2$$

en factores de primer grado no se necesita otra cosa que los números enteros positivos y negativos:

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y).$$

Pero el mismo problema si es $x^2 + y^2$ exige "imaginarios":

$$x^2 + y^2 = (x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1})$$

Dando un paso en alguno de los muchos posibles caminos que se abren podemos intentar descomponer $x^2 + y^2 + z^2$ en dos factores de primer grado. ¿Son suficientes los números positivos, negativos e imaginarios? ¿Debemos inventar algún nuevo tipo de número para resolver el problema? Este último es el caso. Se encontró que para los nuevos números necesarios, las reglas del Álgebra común no son válidas en un aspecto importante; ya no es cierto que el orden en que los números se multiplican entre sí es indiferente, o sea que para los nuevos números, no es verdad que

$$a \times b \text{ sea igual a } b \times a.$$

Seremos más explícitos cuando nos ocupemos de Hamilton, pero por el momento haremos notar que el problema algebraico elemental de descomponer en factores nos conduce rápidamente a regiones donde son inadecuados los números complejos.

¿Hasta dónde podremos ir, cuáles son los números *posibles más generales,* si insistimos en que para esos números haya que mantener las leyes familiares del Álgebra común? A finales del siglo XIX se demostró que en los números complejos x + ¡y, donde x, y son números reales e $i = \sqrt{-1}$ so los más generales en que el Álgebra común es aplicable. Los números reales, recordaremos, corresponden a las distancias medidas siguiendo una línea recta fija en ambos sentidos (positivo, negativo) desde un punto fijo, y la gráfica de una función, $f(x)$ trazada como $y = f(x)$, en Geometría cartesiana, nos da una descripción de una función y de una variable real x. Los matemáticos de los siglos XVIII y XIX imaginaban las funciones como pertenecientes a este tipo. Pero si el Álgebra común y sus extensiones al Cálculo que ellos aplicaban a sus funciones son igualmente aplicables a los números complejos, que incluyen a los números reales como un caso particular, era natural que muchas de las cosas que los primeros analistas encontraron sean en una mitad discutibles. En particular, el Cálculo integral presentó muchas anomalías inexplicables que sólo fueron aclaradas cuando el campo de operaciones se amplió en el mayor grado posible y las funciones de variable compleja fueron introducidas por Gauss y Cauchy.

La importancia de las funciones elípticas en todo este vasto y fundamental desarrollo no puede ser desconocida. Gauss, Abel y Jacobi, por su detenida y detallada elaboración de la teoría de funciones elípticas, donde los números complejos aparecen inevitablemente, proporcionan un terreno apropiado para el descubrimiento y mejoramiento de los teoremas generales en la teoría de funciones de una variable compleja. Las dos teorías parecen haber sido designadas por el destino para complementarse recíprocamente, existe una razón para esto en la profunda conexión de las funciones elípticas con la teoría gaussiana de las formas cuadráticas, que las limitaciones del espacio nos obligan a omitir. Sin las innumerables claves para una teoría general, proporcionadas por los ejemplos especiales de teoremas de mayor alcance que se presentan en las funciones elípticas, la teoría de funciones de una variable compleja se habría desarrollado mucho más lentamente de lo que lo hizo el teorema de Liouville, toda la cuestión de la periodicidad múltiple con su influencia sobre la teoría de las funciones algebraicas y sus integrales serán recordadas por los lectores matemáticos. Si algunos de estos grandes monumentos de la

Matemática del siglo XIX se han perdido ya en la niebla del ayer, sólo necesitamos recordar que el teorema de Picard sobre valores excepcionales en el entorno de un punto singular esencial, uno de los más sugestivos en el Análisis corriente, fue demostrado por primera vez mediante recursos que se originaron en la teoría de las funciones elípticas. Con este breve resumen que nos muestra el porqué las funciones elípticas fueron importantes en las Matemáticas del siglo XIX, podemos pasar a la obra cardinal de Jacobi en el desarrollo de la teoría.

La historia de las funciones elípticas es muy complicada, y aunque de considerable interés para los especialistas, no es probable que atraiga al lector general. En consecuencia, omitiremos los datos (cartas de Gauss, Abel, Jacobi, Legendre y otros) sobre las cuales está basado el siguiente resumen.

En primer lugar se ha establecido que Gauss se anticipó a Abel y Jacobi en 27 años en algunos de sus más notables trabajos. En efecto, Gauss dice que "Abel ha seguido exactamente el mismo camino que yo seguí en 1798". Esta afirmación es exacta y así lo demuestran las pruebas que fueron publicadas después de la muerte de Gauss. Segundo, parece que puede aceptarse que Abel se anticipó a Jacobi en ciertos detalles, pero que Jacobi consiguió grandes progresos ignorando completamente la obra de su rival.

Una propiedad capital de las funciones elípticas es su *doble periodicidad* (descubierta en 1825 por Abel). *Si E (x)* es una función elíptica, habrá dos números distintos, es decir p_1, p_2, tales que

$$E(x + p_1) = E(x)$$
$$E(x + P_2) = E(x)$$

para todos los valores de la variable x.

Finalmente, por lo que se refiere a la faceta histórica, mencionaremos el papel algo trágico desempeñado por Legendre. Durante cuarenta años estuvo esclavo de las *integrales* elípticas, (no de las funciones elípticas), sin darse cuenta de que Abel y Jacobi vieron casi al mismo tiempo, que invirtiendo su punto de vista todo el problema se simplificaba infinitamente. Las integrales elípticas se presentan primeramente en el problema de hallar la longitud de un arco de elipse. A lo que hemos dicho acerca de la inversión al ocuparnos de Abel, puede añadirse lo siguiente enunciado en símbolos, que nos mostrará claramente el punto en que Legendre se equivocó.

Si *R(t)* es un polinomio en t, una integral del tipo

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\,dt$$

se llama una *integral elíptica si R(t)* es de tercer o de cuarto grado; si *R(t)* es de tercer grado la integral se llama abeliana (porque gran parte de la obra de Abel se refiere a tales integrales). *Si R(t)* es de sólo segundo grado, la integral se puede calcular por medio de funciones elementales. En particular

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\,dt = \operatorname{sen}^{-1} x$$

($\operatorname{sen}^{-1} x$ se lee "un ángulo cuyo seno es *x")*. Es decir, si

$$y = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{R(t)}}\,dt$$

consideraremos el límite *superior*, x, de la integral, como una función de la integral misma, o sea de y. Esta inversión del problema elimina la mayor parte de las dificultades con que Legendre tropezó durante cuarenta años. La exacta teoría de estas importantes integrales pudo progresar una vez eliminada esta obstrucción, como los trozos de leño siguen la corriente del río eliminado el remanso.

Cuando Legendre supo lo que Abel y Jacobi habían hecho les alentó con suma cordialidad, aunque pudo darse cuenta que esta forma más simple de abordar el problema [de la inversión], anulaba lo que había sido su obra maestra de 40 años de trabajo. Para Abel el elogio de Legendre llegó demasiado tarde desgraciadamente, pero para Jacobi fue un estímulo para seguir trabajando. En una de las correspondencias más interesantes de toda la literatura científica, el joven de 20 años y el veterano, cumplido los 70, se expresan recíprocamente sus elogios y gratitud. La única nota discordante es el menosprecio manifiesto de Legendre por Gauss, a quien Jacobi defiende vigorosamente. Pero como Gauss jamás consistió en publicar sus investigaciones, había planeado una obra importante sobre las funciones elípticas cuando Abel y Jacobi se le anticiparon en la publicación, difícilmente puede culparse a Legendre por tener una opinión totalmente equivocada. Por falta de espacio debemos omitir párrafos de esta hermosa correspondencia. (Las cartas están publicadas en el volumen 1 de la *Werke* de Jacobi).

La creación, en unión con Abel, de la teoría de funciones elípticas fue sólo una pequeña, aunque importante, parte de la enorme producción de Jacobi. Para sólo enumerar todos los campos que enriqueció en su breve vida de trabajo de menos de un cuarto de siglo, sería necesario más espacio de lo que podemos dedicar a un hombre en un libro como éste. Por tanto, mencionaremos tan sólo algunas de las cosas más importantes que hizo.

Jacobi fue el primero en aplicar las funciones elípticas a la teoría de los números. Esta iba a ser la diversión favorita para algunos de los grandes matemáticos que sucedieron a Jacobi. Es un tema curioso, donde los arabescos de la ingeniosa Álgebra revelan inesperadamente relaciones, hasta entonces insospechadas, entre todos los números comunes. Por este medio Jacobi demostró la famosa afirmación de Fermat de que cualquier número entero, 1, *2*, *3*, ... es una suma de cuatro cuadrados de números enteros (siendo considerado el cero como un entero), y además su bello análisis le permitió ver las *diversas ma*neras en que cualquier entero puede ser expresado como tal suma[1].

Para quienes gustan de aspectos más prácticos, podemos citar la obra de Jacobi en dinámica. En este tema de fundamental importancia para la ciencia aplicada y para la física matemática, Jacobi hizo el primer significativo progreso más allá del logrado por Lagrange y Hamilton. Los lectores familiarizados con la mecánica de los cuantos recordarán el importante papel desempeñado en algunos de los aspectos de esa revolucionaria teoría por la ecuación Hamilton-Jacobi. Su obra sobre ecuaciones diferenciales inicia una nueva era.

En Álgebra para mencionar una sola cosa entre muchas, Jacobi ideó la teoría de determinantes en la simple forma ahora familiar a todo el que estudie segundo curso de Álgebra.

[1] Si n es impar, el número de formas es ocho veces la suma de todos los divisores de n incluidos 1 y n); si n es par, el número de formas es 24 veces la suma de todos los divisores impares de n.

Para la teoría de la atracción de Newton-Laplace-Lagrange, Jacobi hizo contribuciones especiales mediante sus bellas investigaciones sobre las funciones que se repiten varias veces en esa teoría y mediante aplicaciones de las funciones elípticas y abelianas a la atracción de los elipsoides.

De una originalidad aun mayor es su descubrimiento de las funciones abelianas. Tales funciones surgen al invertir una integral abeliana, en la misma forma que las funciones elípticas surgen de la inversión de una integral elíptica. (Los términos técnicos fueron mencionados a principio de este capítulo). Aquí no tenía nada que le guiara y durante largo tiempo tuvo que caminar en un laberinto sin claves. Las funciones inversas apropiadas en el caso más sencillo son funciones de dos variables, que tienen cuatro períodos; en el caso general, las funciones tienen n variables y 2n períodos; las funciones elípticas corresponden a n = 1. Este descubrimiento fue para el Análisis del siglo XIX lo que el descubrimiento de Colón fue para la geografía del siglo XV.

Jacobi no murió tempranamente por exceso de trabajo, como sus amigos predecían, sino de viruela (18 de febrero de 1851), teniendo 47 años. Antes de terminar citaremos su respuesta al gran físico matemático francés que reprochaba a Abel y Jacobi de "gastar" su tiempo en las funciones elípticas, mientras aun debían ser resueltos problemas sobre conducción del calor. "Cierto es dice Jacobi, que M. Fourier opina que el principal objeto de la Matemática es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debía saber que el único objeto de la ciencia es honrar la mente humana, y que bajo este título un problema referente a los números es tan digno de estima como una cuestión acerca del sistema del mundo". Si Fourier reviviera quedaría asombrado de lo que le ha ocurrido al Análisis que él inventó para "utilidad pública y para la explicación de los fenómenos naturales". Por lo que se refiere a la física matemática, el Análisis de Fourier hoy tan sólo constituye un detalle en la infinitamente más vasta teoría de los problemas del valor-límite, y es en la más pura de la Matemática pura donde el Análisis que Fourier inventó encuentra su interés y su justificación.

Capítulo Decimonoveno
UNA TRAGEDIA IRLANDESA

HAMILTON

En matemática fue más grande
Que Tycho Brahe o Erra Pater;
Pues por escala geométrica
Pudo hallar el tamaño
de los vasos de cerveza

Samuel Butler

William Rowan Hamilton es indudablemente el hombre de ciencia más importante que Irlanda ha producido. Subrayamos su nacionalidad, pues el impulso que se halla tras la actividad incesante de Hamilton fue su deseo confesado de poner su soberbio genio al servicio y gloria de su país nativo. Algunos han pretendido que era descendiente de escoceses. Hamilton mismo insiste en que era irlandés, y ciertamente es difícil para un escocés ver algo de escocés en el más grande y más elocuente matemático de Irlanda.

El padre de Hamilton fue procurador en Dublín, Irlanda, donde el día 3 de agosto de 1805[1] nació el más pequeño de los tres hermanos y una hermana. El padre era un hombre de negocios con una elocuencia, "exuberante", un religioso fanático y, finalmente, y por desgracia no en pequeño grado, demasiado jovial, rasgos todos que fueron trasmitidos a su inteligente hijo. La brillantez intelectual extraordinaria de Hamilton fue heredada probablemente de su madre, Sarah Hutton, quien procedía de una familia bien conocida por su talento. Sin embargo, por la parte del padre, las nubes de elocuencia tanto verbal como escrita que hacían de este alegre sujeto el animador de todas las fiestas, se condensó en una forma menos gaseosa en un tío de William, el Reverendo James Hamilton, cura de la aldea de Trim (distante 20 millas de Dublín). El tío James era en realidad un lingüista sobrehumano, el griego, el latín, el hebreo, el sánscrito, el caldeo, el pali, y el cielo sabe qué otros paganos dialectos, venían a la punta de su lengua tan fácilmente como las lenguas más civilizadas de la Europa continental y de Irlanda. Esta facilidad poliglota desempeñó una parte importante en la precoz y extraordinariamente defectuosa educación del infeliz y

[1] En su tumba figura como fecha de nacimiento, error que obedece a que nació a medianoche en punto. Hamilton, que tenía pasión por los pequeños detalles, eligió el 3 de agosto; pero al final de su vida rectificó, por razones sentimentales, y aceptó el 4.

diligente William, que a la edad de 3 años, habiendo dado ya muestra de su genio, fue separado del afecto de su madre y obligado por su estúpido padre a aprender toda clase de idiomas bajo el experto tutelaje del tío James.

Poco intervinieron los padres de Hamilton en la educación de su hijo, pues la madre murió cuando tenía 12 años y su padre 2 años más tarde. A James Hamilton corresponde el mérito de haber abusado de la capacidad de William para el aprendizaje de lenguas manifiestamente inútiles, y a la edad de 13 años constituyó uno de los ejemplos más notables de monstruosidad lingüística de la historia. El hecho de que Hamilton no se hiciera un insufrible pedante después de esta instrucción equivocada de su tío, atestigua la solidez de su sentido común irlandés. La educación que sufrió debían haber hecho de él un perfecto asno en vez de un hombre de genio.

El relato de los triunfos infantiles de Hamilton podrá parecer una mala novela, pero es cierto: A los tres años leía perfectamente el inglés y tenía grandes conocimientos de Aritmética; a los cuatro fue un buen geógrafo; a los cinco leía y traducía el latín, el griego y el hebreo, y le gustaba recitar versos de Dryden, Collins, Milton y Homero, de este último en griego; a los ocho añadió el dominio del italiano y el francés a su colección, y su dominio del latín le permitía expresar su emoción ante la belleza del paisaje irlandés en hexámetros latinos citando la corriente prosa inglesa le parecía demasiado plebeya para poner de manifiesto sus nobles y exaltados sentimientos; finalmente, antes de cumplir los 10 años estableció los fundamentos firmes para profundizar el estudio de las lenguas orientales, comenzando por el árabe y el sánscrito.

La enumeración de las lenguas conocidas por Hamilton no es aún completa. Cuando William no había cumplido aún 10 años su tío afirmaba: "Su sed por las lenguas orientales es inapagable. Ahora domina la mayor parte de ellas, salvo algunas de menor importancia y relativamente locales. El conocimiento del hebreo, del persa y del árabe, ha sido facilitado por su conocimiento profundo e íntimo del sánscrito. El caldeo y el sirio también le son conocidos, así como el indostánico, el malayo, el mahratta, el bengalí y otros. Va a comenzar el estudio del chino, pero la dificultad de procurarse libros es muy grande. Me cuesta grandes sumas obtenerlos en Londres, pero espero que el dinero no sea mal gastado". A estas palabras sólo nos queda alzar los ojos hacia el cielo y exclámar: ¡Dios mío! ¿Qué se proponían con todo esto?

Teniendo 13 años William podía jactarse de que había aprendido una lengua por cada año de vida. A los 14 compuso una florida bienvenida en persa para el embajador persa que visitaba Dublín, y que le fue comunicada al asombrado personaje. Deseando demostrar sus conocimientos el joven Hamilton quiso ver al embajador, pero el astuto oriental, prevenido por su fiel secretario, lamentó mucho que debido a un molesto dolor de cabeza no "pudiera recibirme (dice Hamilton) personalmente". Quizá el embajador, no se hubiera repuesto aún del banquete oficial. La traducción de la bienvenida es al menos algo terrible, y el saludo tenía que ser lo que podía esperarse de un muchacho de 14 años que toma con devastadora seriedad los pasajes más pegajosos y ampulosos de los poetas persas, imaginándose lo que podría gustarle a un buen oriental que desea echar una cana al aire en Irlanda. Si el joven Hamilton deseaba realmente visitar al embajador debía haberle enviado un arenque salado y no un poema persa.

Salvo por su asombrosa capacidad, por la madurez de su conversación y por su amor poético a la naturaleza en todas sus manifestaciones, Hamilton era como cualquier muchacho normal. Le gustaba nadar y no tenía la palidez interesante, aunque algo repulsiva, del estudioso. Su carácter más que el de un vigoroso muchacho irlandés se caracterizaba por su invariable amabilidad. En la vida ulterior mostró una vez su estirpe irlandesa desafiando a un detractor, que le había llamado embustero, a mortal combate. Pero el asunto fue amigablemente resuelto, y Sir William no tuvo que ser legítimamente contado como uno de los grandes duelistas matemáticos. En otros respectos el joven Hamilton no era un muchacho normal. No podía tolerar el dolor o el sufrimiento de los animales ni de los hombres. Toda su vida Hamilton amó a los animales, y, lo que es más raro, los respetó como iguales.

La redención de Hamilton de su disparatada devoción por las lenguas inútiles comenzó cuando tenía 12 años y se completó antes de que cumpliera los 14. El humilde instrumento elegido por la Providencia para desviar a Hamilton del camino del error, fue el joven calculador americano Zerah Colburn (1804-1839), que a la sazón asistía al *Westminster School* en Londres. Colburn y Hamilton fueron reunidos, esperando que el joven genio irlandés fuera capaz de penetrar en el secreto de los métodos del americano, que el mismo Colburn no comprendía totalmente, (como vimos en el capítulo sobre Fermat). Colburn fue absolutamente franco al exponer sus trucos a Hamilton, quien a su vez mejoró lo que había aprendido. Poco hay de abstruso o de notable en los métodos de Colburn. Sus proezas se basaban en su memoria. Hamilton reconoce la influencia que sobre él ejerció Colburn en una carta escrita cuando tenía 17 años (agosto 1822) a su primo Arthur.

Teniendo 17 años Hamilton había dominado la Matemática, siguiendo el Cálculo integral, y pudo conocer la astronomía matemática, necesaria para ser capaz de calcular los eclipses. Leyó a Newton y a Lagrange. Todo esto constituía una diversión, pues los estudios humanistas eran aún para él los principales. Lo más importante es que había hecho ya "algunos descubrimientos curiosos", que comunicó en carta a su hermana Eliza.

Los descubrimientos a que Hamilton se refiere son probablemente los gérmenes de su primera gran obra. La de los sistemas de rayos en óptica. Es decir cuando cumplió 17 años Hamilton inició su carrera de descubrimientos fundamentales. Ya antes había atraído la atención del doctor Brinkley, profesor de astronomía de Dublín, por el descubrimiento de un error en la demostración propuesta por Laplace del paralelogramo de las fuerzas.

Hamilton jamás asistió a una escuela antes de entrar en la Universidad, pues toda la enseñanza preliminar se debió a su tío y al estudio privado. Su forzada devoción a los estudios humanistas como preparación para los exámenes en el Trinity College de Dublín no absorbieron todo su tiempo, pues el 31 de mayo de 1823 escribía a su primo Arthur: "En óptica he hecho un descubrimiento muy curioso, al menos así me lo parece..."

Si, como se ha supuesto, este descubrimiento se refiere a la "función característica" que Hamilton nos describe, muestra que su autor, como algunos otros matemáticos, se caracterizó por su particular precocidad. El 7 de julio de 1823, el joven Hamilton ocupó el primer puesto entre 100 candidatos en los exámenes del Trinity College. Su fama le precedía, y como se esperaba fue pronto una celebridad. En efecto, sus conocimientos humanistas y matemáticos cuando todavía no había obtenido su título excitaron la curiosidad de los círculos académicos en Inglaterra y Escocia, así como de Irlanda, y algunos pensaron que había aparecido un segundo Newton. Fácil es imaginar todos los triunfos cosechados antes de terminar su carrera. Obtuvo prácticamente todos los premios y logró los más altos honores, tanto en los estudios humanistas como en la Matemática. Pero, lo que es más importante que todos esos triunfos, completó la parte primera de su memoria, que marca una época, sobre el sistema de rayos. "Este joven, hizo notar el Dr. Brinkley cuando Hamilton presentó su memoria a la Academia Real Irlandesa, no será, sino que es el primer matemático de su época".

Sus intensos trabajos para mantener su brillante expediente académico y las horas empleadas más provechosamente en la investigación no absorbieron todas las superabundantes energías del joven Hamilton. A los 19 años tuvo la primera de sus tres grandes aventuras amorosas. Consciente de su propia "indignidad" especialmente en lo que se refiere a sus perspectivas materiales, William se contentaba con escribir poemas a la dama de sus pensamientos, con el natural resultado de que un hombre más prosaico se casara con la muchacha. En los primeros días de mayo de 1825, Hamilton supo por boca de la madre de su amada que ésta se había casado con su rival. Podemos formarnos una idea de la conmoción que experimentó el joven teniendo en cuenta el hecho de que Hamilton, un hombre profundamente religioso para quien el suicidio era un pecado mortal, intentó poner fin a sus días. Por fortuna para la ciencia encontró su alivio en otro poema. Toda su vida Hamilton fue un prolífico versificador, pero su verdadera poesía, como dijo a su amigo y ardiente admirador William Wordsworth, era la Matemática. En esto todos los matemáticos están conformes.

Hablaremos ahora de algunas de las grandes amistades de Hamilton con algunos de los literatos más brillantes de su día, los poetas Wordsworth, Southe y Coleridge, y la llamada escuela lakista, Aubrey de Vere y la novelista didáctica María Edgeworth. Wordsworth y Hamilton se encontraron por primera vez con ocasión de un viaje de este último en septiembre de 1827 al distrito inglés de los lagos. Habiendo visitado a Wordsworth para "tomar el té", Hamilton y el poeta ambularon de una parte a otra toda la noche, intentando cada uno de ellos dejar en su casa al otro. Al día siguiente Hamilton envió a Wordsworth un poema de noventa líneas que el poeta podría muy bien haber gorjeado en uno de sus vuelos menos inspirados. Como es natural, a Wordsworth no le agradó el inconsciente plagio del joven matemático, y después de un tibio elogio comunicó al esperanzado autor que "la técnica (¿qué otra cosa podía esperarse de un escritor tan joven?) no era la que debía ser". Dos años más tarde, cuando Hamilton estaba ya instalado en el observatorio de Dunsink, Wordsworth le devolvió la visita. Eliza, la hermana de Hamilton, al ser presentada al poeta, se sintió "parodiando involuntariamente las primeras líneas de su propio poema *Yarrow Visited,*

¡Y éste es Wordsworth! éste es el hombre
de quien mi fantasía acarició
tan fielmente un sueño en la vigilia,
¡una imagen que ha perecido!"

Uno de los grandes beneficios obtenidos por la visita de Wordsworth fue que Hamilton se diera cuenta al fin de que "su camino debía ser el camino de la ciencia y no el de la poesía; que debía renunciar a la esperanza de cultivar ambas, y que por tanto debía resignarse a despedirse dolorosamente de la poesía". En una palabra, Hamilton comprendió la manifiesta verdad de que no había en él una chispa de poesía, en el sentido literario. De todos modos continuó versificando durante toda su vida. La opinión de Wordsworth respecto a la inteligencia de Hamilton era muy elevada. En efecto, dijo en una ocasión que sólo dos hombres habían producido en él un sentimiento de inferioridad, Coleridge y Hamilton.

Hamilton no conoció a Coleridge hasta 1832, cuando el poeta había quedado reducido a una imagen espuria de un mediocre metafísico alemán. De todos modos cada uno de ellos estimaba en mucho la capacidad del otro, pues Hamilton, había sido durante largo tiempo un devoto estudioso de Kant. En efecto, la especulación filosófica fascinó siempre a Hamilton, y en una ocasión declaró ser un sincero creyente, intelectual, pero no internamente, del idealismo desvitalizado de Berkeley. Otro lazo entre ambos fue su preocupación por la faceta teológica de la filosofía (si existe tal faceta), y Coleridge favoreció a Hamilton con sus rumias semidigeridas sobre la Santísima Trinidad, que enriquecieron los conocimientos del devoto matemático.

La terminación de los estudios de Hamilton en el *Trinity College* fue aún más espectacular que en su comienzo; en realidad es única en los anales universitarios. El Dr. Brinkley renunció a su cátedra de astronomía al ser nombrado Obispo de Cloyne. Siguiendo la costumbre británica, la vacante fue anunciada, y se presentaron varios distinguidos astrónomos, entre ellos George

Biddell Airy (1801-1892), más tarde astrónomo real de Inglaterra. Después de alguna discusión, la Junta Directiva eligió unánimemente a Hamilton para la cátedra, aunque tan sólo tenía entonces 22 años (1827). "Recto se abría ante él el camino dorado", y Hamilton resolvió no defraudar las esperanzas de sus entusiastas electores. Desde los 14 años tenía pasión por la astronomía, y en una ocasión, siendo muchacho, señaló el observatorio situado en la colina de Dunsink afirmando que si le dieran a elegir ése sería el lugar donde más le gustaría vivir. Ahora, teniendo 22 años, se había realizado su ambición. Todo lo que tenía que hacer era seguir adelante. Se inició brillantemente. Aunque Hamilton no era un astrónomo práctico, y aunque su ayudante era incompetente, estas dificultades no eran graves. En su cargo del Observatorio de Dunsink jamás podría aspirar a ser una figura importante en la astronomía moderna, y Hamilton decidió sabiamente dedicar sus principales esfuerzos a la Matemática. A los 23 años publicó el complemento "a los curiosos descubrimientos" que había hecho cuando tenía 17, la parte I de *Una teoría de los sistemas de rayos,* la gran obra que es para la óptica lo que la Mecanique analytique de Lagrange es para la mecánica, y que en manos de Hamilton se iba a extender hasta la dinámica, dando a la ciencia fundamental lo que es quizá su forma decisiva y perfecta.

Las técnicas que Hamilton introdujo en la Matemática aplicada en esta su primera obra maestra, son hoy indispensables en la física matemática, y el objeto de muchas investigaciones en diferentes ramas de la física teórica ha sido reunir el conjunto de la teoría en un principio hamiltoniano. Esta magnífica obra es la que dio lugar a que Jacobi 14 años más tarde, en la reunión celebrada en Manchester, en 1842, por la *British Association,* afirmara que "Hamilton es el Lagrange de vuestro país", refiriéndose a los pueblos de habla inglesa. Como Hamilton mismo se tomó el trabajo de describir la esencia de sus nuevos métodos en términos comprensibles para los no especialistas, citaremos algunos de los párrafos de su obra presentada a la *Royal Irish Academy*, el 23 de abril de 1827.

"Un rayo, en óptica, debe ser considerado como una línea recta o flexionada o curvada a lo largo de la cual se propaga la luz; y un sistema de rayos como una colección o agregado de tales líneas, relacionado por algún lazo común, alguna semejanza de origen o producción, brevemente alguna unidad óptica. Así, los rayos que divergen desde un punto luminoso componen un sistema óptico, y, después que se han reflejado en un espejo, componen otro. Investigar las relaciones geométricas de los rayos de un sistema del cual conocemos (como en estos casos simples) el origen óptico y la historia, inquirir cómo se disponen entre sí, cómo divergen o convergen o son paralelos, qué superficies o curvas tocan o cortan y bajo qué ángulo, cómo pueden combinarse en haces parciales, y cómo cada rayo en particular puede ser determinado y distinguido de los restantes, significa estudiar ese sistema de rayos. Generalizar este estudio del sistema, de modo que podamos pasar, sin cambiar de plan, al estudio de otros sistemas, asignar reglas generales y un método general para que estas disposiciones ópticas separadas puedan relacionarse y armonizarse entre sí, es formar una *Teoría de los sistemas de rayos.* Finalmente, hacer esto en tal forma que pueda recurrirse a la Matemática moderna, reemplazando figuras por funciones y diagramas por fórmulas, es construir una teoría algebraica de tales sistemas o una *Aplicación del Álgebra* a la *óptica.*

"Para llegar a tal aplicación es natural y hasta necesario emplear el método introducido por Descartes para la aplicación del Álgebra a la Geometría. El gran matemático filósofo concibió la posibilidad y empleó el plan de representar algebraicamente la posición de cualquier punto en el espacio por tres coordenadas, que responden respectivamente a la distancia a que el punto se halla, en las tres direcciones rectangulares (Norte y Sur, Este y Oeste), de algún punto a origen fijo elegido o aceptado para ese fin; las tres dimensiones del espacio reciben así sus tres equivalentes algebraicos, sus concepciones y símbolos apropiados en la ciencia, general de la progresión [orden]. Un plano o superficie curva se define así algebraicamente considerando como su ecuación la relación que enlaza las tres coordenadas de cualquier punto sobre él, y común a todos esos puntos; y una línea, recta o curva, se expresa siguiendo el mismo método, asignando esas dos relaciones, correspondiente a dos superficies de las cuales la línea puede ser considerada corno la intersección. De esta forma es posible realizar investigaciones generales respecto a las superficies y curvas, y descubrir propiedades comunes a todas mediante investigaciones generales que se refieren a ecuaciones entre tres números variables. Todo problema geométrico puede ser, al menos, algebraicamente expresado, si es que no resuelto, y todo perfeccionamiento o descubrimiento en Álgebra se hace susceptible de aplicación o interpretación en Geometría. Las ciencias del espacio y del tiempo (adoptando aquí un concepto de Álgebra que yo me he aventurado a proponer en otro lugar) se entretejen íntimamente y se relacionan indisolublemente entre sí. De aquí que sea casi imposible perfeccionar una de esas ciencias sin perfeccionar también la otra. El problema de trazar tangentes a las curvas conduce al descubrimiento de las fluxiones o diferenciales; el de la rectificación y cuadratura a la inversión de fluentes o integrales; la investigación de la curvatura de superficies requiere el cálculo de diferenciales parciales; los problemas de isoperímetros dan lugar a la formación del cálculo de variaciones. Y, recíprocamente, todos esos grandes pasos en la ciencia algebraica tienen inmediatamente sus aplicaciones a la Geometría y conducen al descubrimiento de nuevas relaciones entre puntos o líneas o superficies. Pero aun cuando las aplicaciones del método no hubieran sido tan variadas e importantes, se obtendría un gran placer intelectual en su contemplación como tal método.

"La primera aplicación importante del método algebraico de las coordenada, al estudio de los sistemas ópticos fue hecho por Malus, un oficial de ingenieros francés del ejército de Napoleón en Egipto, y que adquirió celebridad en la historia de la óptica física como descubridor de la polarización de la luz por reflexión. Malus presentó al Instituto de Francia, en 1807, un profundo trabajo matemático del tipo antes aludido, titulado *Traité d'Optique*. El método empleado en ese tratado puede ser descrito así: La dirección de un rayo recto de cualquier sistema óptico final se considera dependiente de la posición de algún punto asignado sobre el rayo, de acuerdo con alguna ley que caracteriza el sistema particular y le distingue de los demás; esta ley puede ser algebraicamente expresada asignando tres expresiones para las tres coordenadas de algún otro punto del rayo, como funciones de las tres coordenadas del punto propuesto. En consecuencia, Malus introduce símbolos generales que denotan esas tres funciones (o al menos tres funciones equivalentes a éstas) y procede a deducir varias conclusiones generales importantes por cálculos muy complicados; muchas de estas conclusiones, así como algunas otras, fueron también obtenidas más tarde por mí cuando por un método casi similar, sin saber lo que Malus había hecho, comencé mi ensayo de aplicar el Álgebra a la óptica. Pero mis investigaciones pronto me condujeron a sustituir este método de Malus por otro muy diferente y mucho más *apropiado* para el estudio de los sistemas ópticos. En él, en lugar de emplear las *tres* funciones antes mencionadas, o al menos sus dos razones, es suficiente emplear una función, que llamo característica o principal y así, mientras Malus hace sus deducciones trabajando con las *dos ecuaciones* de un rayo, yo establezco y empleo, en cambio, una ecuación de un *sistema*.

"La función que he introducido para este fin, y que constituye la base de mi método de deducción en óptica matemática, se ha presentado, en otros respectos, a los anteriores autores como expresión del resultado de una inducción muy elevada y general en esa ciencia. Este conocido resultado suele llamarse la *ley de* mínima acción y también el principio del tiempo mínimo, [véase el capítulo sobre Fermat], y abarca todo lo que hasta ahora se ha descubierto respecto a las reglas que determinan las formas y posiciones de las líneas a lo largo de las cuales se propaga la luz, y los cambios de dirección de esas líneas producidos por reflexión o refracción ordinaria o extraordinaria (la última al pasar por un cristal de doble refracción como el espato de Islandia, en el cual cada rayo se desdobla en dos, ambos refractados, al penetrar en el cristal). Cierta cantidad, que en una teoría física es la acción y en otra el tiempo, empleada por la luz al pasar desde un punto a otro segundo punto, resulta menor que si la luz pasara por cualquiera otra ruta que no fuera su camino real, o al menos tiene lo que técnicamente se llama su variación nula, manteniéndose invariables los extremos del camino. La novedad matemática del método consiste en considerar esta cantidad como una función de las coordenadas de estos extremos, la cual varía cuando ellas varían, de acuerdo con la ley que he llamado la *ley de la acción variable;* reduciendo todas las investigaciones respecto a los sistemas ópticos del rayo al estudio de esta única función; una reducción que presenta a la óptica matemática bajo un concepto completamente nuevo, y análogo, (en mi opinión) al aspecto bajo el cual Descartes presentó la aplicación del Álgebra a la Geometría".

Nada necesitamos añadir a estos párrafos de Hamilton, salvo la posible observación de que ninguna ciencia, por claramente que se exponga, se comprende tan fácilmente como cualquier novela, por mal escrita que esté. Los párrafos exigen una segunda lectura.

En esta gran obra sobre el sistema de los rayos Hamilton hizo una construcción superior a las anteriores. Casi exactamente un siglo después de haber sido escrito el párrafo mencionado pudo verse que los métodos que Hamilton introdujo en la óptica eran justamente los requeridos en la mecánica ondulatorio asociada con la teoría moderna de los cuantos y con la teoría de la estructura atómica. Puede recordarse que Newton defendía una teoría de la luz corpuscular o por emisión, mientras que Huygens y sus sucesores, hasta casi nuestros días, buscaron explicar los fenómenos de la luz valiéndose de una teoría de las ondas. Ambos puntos de vista fueron unidos y, en un sentido puramente matemático, reconciliados en la moderna teoría de los cuantos: emitida en los años 1925 1926. En 1834, cuando tenía 28 años, Hamilton realizó su ambición de extender los principios que había formulado para la óptica a toda la dinámica.

La teoría de los rayos de Hamilton, poco después de su publicación, cuando su autor tenía 27 años, tuvo uno de los más rápidos y más espectaculares triunfos obtenidos por la Matemática. La teoría tiene por objeto explicar fenómenos del Universo físico real, como se observan en la vida diaria en los laboratorios científicos. A no ser que una teoría matemática sea capaz de predicciones que los experimentos comprueban más tarde, no es superior a un diccionario conciso de los problemas que sistematiza, y es casi seguro que pronto será sustituida por una descripción más imaginativa que no revela su completa significación a un primer examen. Entre las famosas predicciones que han comprobado el valor de las teorías matemáticas verdaderas en la ciencia física, podemos recordar tres: el descubrimiento matemático hecho por John Couch Adams (1819-1892) y Urbain-Jetbn-Joseph LeveTrier (1811-1877) del planeta Neptuno, independientemente y casi al mismo tiempo en 1845, basándose en un análisis de las perturbaciones del planeta Urano de acuerdo con la teoría newtoniana de la gravitación; la predicción matemática de las ondas inalámbricas por James Clerk Maxwell (18311879) en 1864 como una consecuencia de su propia teoría electromagnética de la luz; y, finalmente, la predicción de Einstein, en 1915-16, de su teoría de la relatividad general, basándose en la desviación de un rayo de luz en un campo gravitatorio, confirmada primeramente por las observaciones del eclipse solar en el histórico 29 de mayo de 1919, y su predicción, basada también en esa teoría, de que las líneas espectrales en la luz procedente de un cuerpo, serían desviadas hacia el extremo rojo del espectro, en una cantidad que Einstein estableció. Los dos últimos ejemplos, el de Maxwell y el de Einstein, son de un tipo diferente del primero. Ambos fenómenos totalmente *desconocidos e imprevistos,* fueron predichos matemáticamente; es decir, estas predicciones fueron cualitativas. Tanto Maxwell como Einstein ampliaron sus predicciones cualitativas con precisas predicciones cuantitativas que excluyeron el valor de simple conjetura a sus profecías cuando fueron finalmente comprobadas experimentalmente.

La predicción de Hamilton de lo que se llama refracción cónica en óptica fue de ese mismo tipo cualitativo y al mismo tiempo cuantitativo. De su teoría de los sistemas de rayos predijo matemáticamente que se encontraría un conjunto de fenómenos inesperados en relación con la refracción de la luz en los cristales biaxiales. Mientras terminaba el tercer suplemento a su memoria sobre los rayos, quedó sorprendido por un descubrimiento que describe del siguiente modo:

"La ley de la reflexión de la luz en los espejos ordinarios parece haber sido conocida por Euclides; la de la refracción ordinaria en una superficie de agua, vidrio u otro medio no cristalizado fue descubierta en una fecha muy posterior por Snellius; Huygens descubrió y Malus, confirmó la ley de la refracción extraordinaria producida por cristales uniaxiales, como el espato de Islandia, y, finalmente, la ley de la doble refracción extraordinaria en las caras de cristales biaxiales, como el topacio o la aragonita fue observada en nuestros días por Fresnel. Pero, hasta en estos casos de refracción extraordinaria o cristalina se observa o se sospecha que no existen más de dos rayos refractados, salvo la teoría de Cauchy, en la que puede ser posible un tercer rayo, aunque probablemente imperceptible para nuestros sentidos. Sin embargo, el profesor Hamilton, investigando por su método general las consecuencias de la ley de Fresnel, fue llevado a concluir que en ciertos casos, que él determina, debe haber no ya dos o tres, y ni siquiera un número finito, sino un número infinito o un cono de rayos refractados dentro de un cristal biaxial, que corresponde a y resulta de un sólo rayo incidente; y que en otros casos un único rayo dentro de tal cristal daría lugar a un infinito número de rayos emergentes, dispuestos en otro cono. Por tanto, basándose en la teoría pudo anticipar nuevas leyes de la luz, a las cuales dio los nombres de refracción cónica interna y *ex*terna".

La predicción y su comprobación experimental por Humphrey Lloyd despertó la ilimitada admiración para el joven Hamilton por parte de quienes podían apreciar lo que había hecho. Airy, su anterior rival para la cátedra de astronomía, considera así el descubrimiento de Hamilton: "Es posible que la predicción más notable que haya sido hecha, sea la realizada últimamente por el profesor Hamilton". Hamilton mismo consideró esta predicción y otras similares como "un resultado subordinado y secundario" comparado con el gran objeto que se hallaba ante su vista para introducir la armonía y unidad en las contemplaciones y razonamientos de la óptica, considerada como una rama de la ciencia pura".

Según algunos este triunfo espectacular puede considerarse como la pleamar de la carrera de Hamilton, y después de su gran obra sobre óptica y dinámica la marea va bajando. Otros, particularmente los que pertenecen a la llamada la encumbrada iglesia de los cuaternios, mantienen que la máxima obra de Hamilton no se había producido aún, la creación de lo que Hamilton mismo considera su obra maestra, merecedora de inmortalidad, su teoría de los cuaternios. Dejando los cuaternios por el momento, podemos simplemente afirmar que desde sus 27 años hasta su muerte, ocurrida a los 6Q, dos desastres hacen estragos en la carrera científica de Hamilton. Su matrimonio y el alcohol. El segundo fue, aunque no totalmente, una consecuencia de su desventurado matrimonio.

Después de una segunda desgraciada aventura amorosa que tuvo un desenlace vulgar pero que el protagonista tomó muy a pecho, Hamilton se casó con su tercera novia, Helen María Bayley, en la primavera de 1833. Tenía entonces 28 años. La novia era la hija de la viuda de un pastor de la ciudad. Helen tenía "un aspecto agradable y distinguido y produjo sobre Hamilton una favorable impresión por su naturaleza sincera y por los principios religiosos que Hamilton sabía que su novia atesoraba, aunque a estas recomendaciones no se añadía una particular belleza del rostro ni

una particular inteligencia". Ahora bien, cualquier necio puede decir la verdad, y si la verdad es todo lo que pueda distinguir a un necio, quien contraiga matrimonio con una mujer de este tipo pagará cara su indiscreción. En el verano de 1832, Miss Bayley "sufrió una peligrosa enfermedad..., y este acontecimiento produjo sin duda en el enamorado Hamilton pensamientos especiales hacia ella en forma de un deseo de que se restableciera; al pasar el tiempo (justamente al romper sus relaciones con la muchacha a la que realmente amaba), cuando se vio obligado a renunciar a su anterior pasión, el camino quedó preparado para tener sentimientos más tiernos y cálidos". Brevemente, Hamilton quedó unido a aquella mujer enferma que iba a ser una semi-inválida para el resto de su vida, y que por su incompetencia o mala salud dejó a su marido en manos de los sucios sirvientes que hacían en la casa lo que querían. Algunas habitaciones, especialmente el estudio de Hamilton, quedaron convertidos en una pocilga. Hamilton necesitaba una mujer enérgica, que supiera poner en orden su casa en lugar de unirse a una mujer débil.
Diez años después de su matrimonio Hamilton, siguiendo este resbaladizo camino, se dio cuenta, con una brutal conmoción, de que se había equivocado. Cuando era joven comía y bebía abundantemente en los banquetes y hacía gala de sus grandes dotes para la elocuencia y la jovialidad. Después de su matrimonio sus comidas eran irregulares, y adquirió el hábito de trabajar 12 a 14 horas de un tirón, tomando simplemente alimentos líquidos.
Se discute si la inventiva matemática se acelera o se retarda por el moderado uso del alcohol, y hasta que se realice una completa serie de experimentos bien *comprobados* esta duda continuará, como en cualquier otra investigación biológica. Si, como algunos mantienen, la vena poética y matemática son afines, es dudoso que el razonable uso alcohólico sea perjudicial para la Matemática; en efecto, existen numerosos ejemplos bien comprobados que atestiguan lo contrario. Es sabido que en el caso de los poetas el "vino y el canto" marchan juntos, y en al menos un caso, el de Sivinburne, sin el primero el segundo se marchitaba casi completamente. Los matemáticos hacen frecuentemente mención del terrible esfuerzo que exige la prolongada concentración sobre una dificultad, y algunos han encontrado que el alcohol puede producir una marcada mejoría. Pero el pobre Hamilton rápidamente superó esa fase, y no sólo en el retiro de su estudio, sino también en la publicidad de los banquetes. En efecto, se embriagó en un banquete de hombres de ciencia. Dándose cuenta de que se había excedido, resolvió no volver a probar el alcohol, y durante dos años mantuvo su resolución. Más tarde, durante una reunión científica en las propiedades de Lord Rosse (dueño del telescopio más grande y más inútil que ha existido), su antiguo rival Airy se burló porque Hamilton sólo bebía agua. Hamilton entonces bebió todo lo que quiso, que fue más que suficiente. A pesar de este obstáculo, su carrera fue brillante, aunque es probable que hubiera podido ir más lejos y haber llegado a una altura mayor que a la que llegó. No obstante alcanzó una altura envidiable, y dejamos a los moralistas deducir la moraleja.
Antes de considerar lo que Hamilton estima como su obra maestra, resumiremos brevemente los honores principales que recibió. A los 30 años desempeñó un cargo importante en la Asociación británica para el progreso de la ciencia, previa la ceremonia de ritual: en su reunión de Dublín y por entonces el Gobernador de Irlanda le armó caballero, tocándole en ambos hombros con la espada del Estado le dijo, "Arrodillaos, profesor Hamilton", y luego, añadió: "Alzaos, Sir William Rowan Hamilton". Esta fue una de las pocas ocasiones en la que Hamilton no supo qué decir. A los 30 años fue nombrado presidente de la Real Academia Irlandesa, y a los 38 le fue asignada una pensión vitalicia de 200 libras por año, concedida por el gobierno británico, siendo entonces Premier Sir Robert Peel, quien sentía poco afecto por Irlanda. Poco después de esto Hamilton realizó su descubrimiento capital, los cuaternios.
Un honor que le produjo mayor satisfacción que todos los hasta entonces recibidos fue el último, cuando ya se hallaba en su lecho de muerte: su elección como primer miembro extranjero de la

Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, fundada durante la guerra civil. Este honor fue concedido en reconocimiento de su obra sobre los cuaternios, que por alguna razón desconocida produjo entre los matemáticos americanos de aquel tiempo (sólo había uno o dos, siendo el principal Benjamín Peirce de Harvard) una conmoción más profunda que las restantes matemáticas británicas desde los Principia de Newton. La precoz popularidad de los cuaternios en los Estados Unidos tiene algo de misterioso. Posiblemente la pomposa elocuencia de las *Lectures* on *Quaternions* cautivó el gusto de una joven y vigorosa nación, que tenía aún que curarse de su morbosa afición a la oratoria senatorial y a los fuegos artificiales del 4 de julio.

Los cuaternios tienen una historia demasiado larga para poder ser expuesta aquí. El mismo Gauss, con su anticipación en 1817 no fue el primero; Euler le precedió con un resultado aislado, que es interpretado más fácilmente acudiendo a los cuaternios. El origen de los cuaternios puede remontarse mucho más lejos, y Augustus de Morgan, aunque jocosamente, ofreció trazar su historia para Hamilton desde los antiguos hindúes hasta la reina Victoria.

Sin embargo, en este lugar tan sólo nos interesa la parte debida a Hamilton.

La escuela inglesa de algebristas, como veremos en el capítulo sobre Boole, colocó el Álgebra común sobre su correcta base durante la primera mitad del siglo XIX. Anticipándose al procedimiento corrientemente aceptado para desarrollar cualquier rama de las matemáticas fundó cuidadosa y rigurosamente el Álgebra *por postulados.* Antes de esto, las diversas clases de "números", fraccionarlos, negativos, irracionales que intervienen en la Matemática cuando se acepta que todas las ecuaciones algebraicas tienen raíces, tenían que funcionar precisamente en el mismo plano que los enteros positivos comunes, que por costumbre eran considerados por todos los matemáticos como "naturales", al par que se experimentaba la vaga sensación de que podían ser completamente comprendidos, aunque ni siquiera hoy lo son, como veremos al ocuparnos de la obra de Georg Cantor. Esta ingenua fe en la coherencia de un sistema fundado sobre el formal y ciego juego de los símbolos matemáticos puede haber sido sublime, pero también es ligeramente idiota. El punto culminante de esta credulidad fue el conocido principio de permanencia *de las leyes formales* que establece, en efecto, que un sistema de reglas que producen resultados consecuentes para un tipo de números, es decir los enteros positivos, continuarán siendo válidos cuando se aplican a cualquier otra clase, o sea a los imaginarios, hasta en el caso en que no puede darse una interpretación a los resultados. No es, pues, sorprendente que esta fe en la integridad de los símbolos sin significación conduzca con frecuencia al absurdo. La escuela inglesa modificó todo esto, aunque fue incapaz de dar el paso final, y *demostrar* que sus postulados para el Álgebra común jamás conducen a una contradicción. Ese paso fue dado únicamente en nuestra propia generación por los investigadores alemanes sobre los fundamentos de la Matemática. A este respecto debemos recordar que el Álgebra sólo se ocupa de procesos *finitos*; cuando intervienen procesos *infinitos,* por ejemplo al sumar una serie infinita, lanzamos al Álgebra hacia otro terreno. Por tanto, el Álgebra titulada elemental contiene muchas cosas, las progresiones geométricas infinitas, por ejemplo, que no son Álgebra en la moderna significación de la palabra.

La naturaleza de lo que Hamilton hizo en su creación de los cuaternios se apreciará más claramente acudiendo a un sistema de postulados (tomados de L. E. Dickson: Algebras and *Their Arithmetics*, Chicago 1923), del Álgebra común, o, como técnicamente se llama, a un campo (los autores ingleses usan algunas veces la palabra corpus como el equivalente del alemán *Körper* o el francés *corps).*

"Un campo F es un sistema compuesto de un conjunto *S* de elementos a, *b, c*,... y dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, que pueden ser realizadas sobre dos elementos cualesquiera (iguales o distintos) *a* y *b* de *S*, tomados en ese orden, para producir únicamente elementos determinados a $\oplus$ b y a $\otimes$ b de *S* tales que satisfagan los postulados I - V. Para simplificar escribiremos $a + b$ en vez de $a \oplus b$ y *ab* en vez de $a \otimes b$, y los llamaremos la suma y el producto, respectivamente, de *a* y *b*. De todos modos, los elementos de *S* serán llamados elementos de *F*.

I. Si *a* y *b* son dos elementos cualesquiera de *F*, $a + b$ y *ab* son elementos determinados de *F*, y

$$b + a = a + b$$
$$ba = ab.$$

II. Si a, b, c, son tres elementos de F,

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

III. Existen en *F* dos elementos distintos, que se representan por 0 y 1, tales que si a es un elemento de *F*, $a + 0 = a$, a1 = a (de aquí $0 + a = a$, $1a = a$, en virtud de I).

IV. Cualquiera que sea el elemento *a* de *F*, existe en *F* un elemento *x* tal que $a + x = 0$ (de aquí $x + a = 0$ en virtud de l).

V. Cualquiera que sea el elemento a (distinto de 0) de F, existe ,en F un elemento y tal que ay = 1 (de aquí ya = 1, en virtud de I).

De estos simples postulados se deduce la totalidad del Álgebra ordinaria. Unas cuantas palabras acerca de algunos de los enunciados pueden ser útiles para aquellos que desde hace tiempo no se ocupan del Álgebra. En II, el enunciado

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

se llama la ley asociativa de la adición, o sea que si se suma *a* y *b* y a esta suma se añade el resultado es el mismo que si se suma a *a*, a suma de *b* y *c*. Lo mismo ocurre respecto de la multiplicación para el segundo postulado enunciado en II. El tercer enunciado en II se llama la *ley distributiva.* En III, se postula la existencia del "cero" y de la "unidad"; en IV, se admite la existencia de los números negativos, y la primera observación entre paréntesis en V, impide la "división por cero". Las exigencias del postulado I se llaman las *leyes conmutativas de* adición y multiplicación respectivamente.

Tal sistema de postulados puede ser considerado como una destilación de la experiencia. Siglos de trabajo con los números y la obtención de resultados útiles siguiendo las reglas de la Aritmética, a las que se llegó empíricamente, sugieren la mayor parte de las reglas sintetizadas en esos postulados precisos, pero una vez comprendidas las sugestiones de la experiencia, la interpretación (Aritmética común) proporcionada por la experiencia es deliberadamente

suprimida u olvidada, y el sistema definido por los postulados se desarrolla abstractamente por sus propios medios, por la vía lógica común más matemática.
Obsérvese en particular el postulado IV que admite la *existencia* de los números negativos. No intentaremos deducir la existencia de negativos con el mismo comportamiento que los positivos. Cuando los números negativos aparecieron por primera vez en la experiencia, como en el "debe" en lugar del "haber", provocaron el mismo horror que las monstruosidades "no naturales" que más tarde serían los números "imaginarios" $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc., que surgen de la solución *formal* de ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, @ $x^2 + 2 = 0$, etc.
Si el lector se remonta a lo que Gauss hizo para los números complejos, apreciará mejor la mayor simplicidad del camino seguido por Hamilton para despojar a los "imaginarios" de su misterio inocente, puramente imaginario. Esta cosa tan sencilla fue uno de los pasos que condujo a Hamilton a sus cuaternios, aunque estrictamente nada tenga que ver con ellos. Es el *método* y el *punto de vista* que existe tras esta ingeniosa refundición del Álgebra de los números complejos los que tienen importancia para las consecuencias.
Si como es usual *i* denota $\sqrt{-1}$, un "número complejo" es un número del tipo $a + bi$, donde *a, b* son "números reales", o si se prefiere, y de modo más general, elementos del campo *F* definido por los postulados mencionados. En lugar de considerar $a + bi$ como un "número", Hamilton lo concibe como una pareja ordenada de "números", y designa esta pareja escribiendo (a, b). Luego define la *suma* y el *producto* de estas parejas, como sugieren las reglas *formales* de combinación sublimadas por la experiencia de los algebristas al tratar números complejos, *como si* las leyes de la Álgebra ordinaria tuvieran aplicación para ellos. Una ventaja de esta nueva forma de considerar los números complejos era ésta: las definiciones de suma y producto de las parejas serían ejemplos de las definiciones abstractas generales de suma y producto como en un campo. De aquí que si se demuestra la coherencia del sistema definido por los postulados para un campo, igual se deduce, sin nueva prueba, para los números complejos y las reglas usuales en virtud de las cuales se combinan. Será suficiente exponer las definiciones de suma y producto en la teoría de los números complejos de Hamilton considerados como parejas (a, b), (c, d), etc.
La suma de (a, b) y (c, d) es $(a + c; b + d)$; su *producto* es $(ac - bd, ad + bc)$. En el último, el signo menos es como en un campo; o sea el elemento *x* postulado en IV se denota por $-a$. Para los 0, 1 de un campo corresponden aquí las parejas (0,0), (1,0). Con estas definiciones se comprueba fácilmente que las parejas de Hamilton satisfacen todos los postulados enunciados para un campo. Pero también están de acuerdo con las reglas formales para tratar los números complejos. Así, para (a, b), (c, d) corresponden respectivamente $a + bi$, $c + di$, y la "suma" formal de estos dos es $(a + c) + (b + d)i$, a la cual corresponde la pareja $(a + c; b + d)$. Además, la multiplicación formal de $a + bi$, $c + di$ da $(ac - bd) + (ad + bc)i$, a la cual corresponde la pareja $(ac - bd; ad + bc)$. Si todo ello resulta nuevo al lector tendrá que repetir la lectura, y esto constituye un ejemplo de la forma en que la Matemática moderna elimina el misterio. Siempre que quede alguna traza de misterio unida a cualquier concepto, ese concepto no es matemático.
Habiendo considerado los números complejos como parejas o pares, Hamilton intentó extender este recurso a los números de tres y cuatro componentes reales. Sin una idea de lo que se trata de lograr, tal empresa parece vaga y carente de significación. El objeto de Hamilton fue inventar un Álgebra que fuera para las rotaciones en el espacio de *tres* dimensiones lo que los números complejos son para las rotaciones en el espacio de *dos* dimensiones, siendo los espacios, en ambos casos, euclidianos, como en la Geometría elemental. Ahora, un número complejo $a + bi$ puede ser considerado como representando un *vector*, es decir, un segmento lineal que tiene

longitud y dirección, como se aprecia en la figura en el que el segmento indicado por la flecha representa el vector OP.

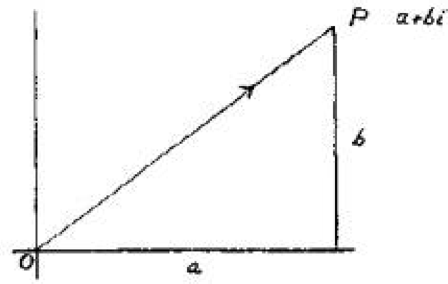


Figura 1

Pero al intentar simbolizar el comportamiento de los vectores en el espacio tridimensional para conservar aquellas propiedades de los vectores que se visan en física, particularmente en la combinación de rotaciones, Hamilton tropezó durante años con una dificultad imprevista, cuya verdadera naturaleza no pudo sospechar en mucho tiempo. Podemos examinar de pasada una de las claves que siguió. La que le guió, según él insistía, tiene la particularidad de que ahora es considerada, casi universalmente, como un absurdo, o al menos como una especulación metafísica sin fundamento en la historia o en la experiencia matemática.

Objetando la fórmula puramente abstracta postulacional del Álgebra defendida por los ingleses contemporáneos suyos, Hamilton intentó fundar el Álgebra sobre algo "más real", y para esta empresa, en realidad sin significación, partió de sus conocimientos de los conceptos erróneos de Kant, explotados por la creación de la Geometría no-euclidiana del espacio como una "forma pura de intuición sensorial". En efecto, Hamilton, que parece desconocer la Geometría no-euclidiana, siguió a Kant al creer que "tiempo y espacio son dos fuentes de conocimiento de las cuales pueden derivarse diversos conocimientos sintéticos a priori. De esto, la matemática pura da un espléndido ejemplo en el caso de nuestro conocimiento del espacio y sus variadas relaciones. Como en ambos casos se trata de formas puras de intuición sensorial, hacen posible las proposiciones sintéticas a priori". Como es natural, cualquier matemático no excesivamente ignorante de hoy sabe que Kant estaba equivocado en su concepción de la Matemática, pero en el año 1840, cuando Hamilton abría camino a los cuaternios, la filosofía kantiana de la Matemática aun tenía un sentido para aquéllos, y eran casi todos los que no habían oído hablar de Lobatchewsky. Hamilton aplicó la doctrina kantiana al Álgebra, y dedujo la notable conclusión de que dado que la Geometría es la ciencia del espacio y dado que el tiempo y el espacio son "formas de intuición puramente sensoriales", el resto de la Matemática debe pertenecer al tiempo, y empleó gran parte de su tiempo elaborando la extraña doctrina de que *el Álgebra es* la ciencia *del tiempo puro.*

Esta excentricidad ha atraído a muchos filósofos, y recientemente ha sido exhumada y solemnemente analizada por los metafísicos, que buscan la piedra filosofal en la vesícula biliar de los matemáticos. Precisamente debido a que "el Álgebra como la ciencia del tiempo puro" carece de significación matemática, la teoría continuará siendo discutida animadamente hasta el fin de los tiempos. La opinión de un gran matemático sobre el aspecto "tiempo puro" del Álgebra puede ser de interés. "No puedo descubrir la relación del Álgebra con el concepto del tiempo", confesaba Cayley; "admitiendo que el concepto de la progresión continua se presente y tenga importancia, no veo que de algún modo pueda ser el concepto fundamental de la ciencia".

Las dificultades de Hamilton al intentar construir un Álgebra de vectores y rotaciones para el espacio tridimensional estaban enraizadas en su convicción inconsciente de que las más importantes leyes del Álgebra ordinaria debían persistir en el Álgebra que buscaba. ¿Cómo se multiplicarían entre sí los vectores en el espacio tridimensional?
Para comprender la dificultad del problema es esencial recordar (véase capítulo sobre Gauss) que los *números complejos ordinarios* $a + bi$, ($i = \sqrt{-1}$) han recibido una sencilla interpretación como *rotaciones* en un plano, y además que los números complejos obedecen a todas las reglas del Álgebra ordinaria, en particular a la ley conmutativa de la multiplicación: si A, B son números complejos $A \times B = B \times A$, siempre que sean interpretados *algebraicamente, o como rotaciones* en un plano. Era humano entonces anticipar que la misma ley conmutativa serviría para las *generalizaciones de* números *complejos* que representan rotaciones *en el espacio de tres* dimensiones.
El gran descubrimiento o invención de Hamilton fue un Álgebra, una de las Álgebras "naturales" de rotaciones en el espacio de tres dimensiones, en las que la ley conmutativa de multiplicación no es aplicable. En esta Álgebra hamiltoniana de cuaternios (como llama a su invención) aparece una multiplicación en la que $A \times B$ no es igual a $B \times A$, sino a menos $B \times A$, es decir, $A \times B = - B \times A$.
Era un descubrimiento de primer orden el que pudiera construirse un Álgebra consecuente, prácticamente útil, en la que no se verifica la ley conmutativa de la multiplicación, y la importancia de este descubrimiento es comparable quizá a la concepción de la Geometría no-euclidiana. Hamilton mismo quedó muy impresionado por la magnitud del hallazgo que repentinamente apareció en su mente (después de 15 años de meditaciones estériles) cuando un día (16 de octubre de 1843), paseando con su mujer, grabó las fórmulas fundamentales de la nueva Álgebra en la piedra del puente sobre el que se encontraba en aquel momento. Su gran invención mostró a los algebristas el camino hacia otras Álgebras, hasta el punto que hoy, siguiendo la ruta de Hamilton, los matemáticos construyen Álgebras prácticamente cuando quieren, negando uno o más de los postulados para un campo y desarrollando las consecuencias. Algunas de estas "Álgebras" son extraordinariamente útiles; las teorías generales abarcan multitud de ellas, incluyendo la gran invención de Hamilton como un mero detalle, aunque muy importante.
Paralelamente a los cuaternios de Hamilton surgieron las numerosas formas de *análisis vectorial* propuestos por los físicos de los dos últimos siglos. En la actualidad todas ellas, incluyendo los cuaternios, en *lo que se refiere a las aplicaciones físicas,* han sido dadas de lado por el incomparablemente más simple y más general *análisis sensorial*, que adquirió su boga con la relatividad general en 1915. Más tarde volveremos a ocuparnos de este punto.
Mientras tanto será suficiente hacer notar que la tragedia más profunda de Hamilton no fue el alcohol ni el matrimonio, sino su obstinada creencia de que los cuaternios daban la clave a la Matemática del universo físico. La historia ha demostrado que Hamilton estaba trágicamente equivocado cuando decía: " ... aun debo afirmar que este descubrimiento me parece tan importante para estos años del siglo XIX, como el descubrimiento de las fluxiones (el Cálculo) lo fue para los últimos años del siglo XVII". Jamás estuvo tan absolutamente equivocado un gran matemático.
Los últimos 22 años de la vida de Hamilton fueron dedicados casi exclusivamente a la elaboración de los cuaternios (incluyendo sus aplicaciones a la dinámica, a la astronomía, y la teoría ondulatoria de la luz) y a su voluminosa correspondencia. El estilo de su obra excesivamente desarrollada *Elements of Quaternions,* publicada un año después de la muerte de

Hamilton, muestra claramente los efectos de la manera como vivía su autor. Después de su muerte, el 2 de septiembre de 1865, cuando tenía 61 años, se vio que Hamilton había dejado una enorme montaña de trabajos en indescriptible confusión, y sesenta enormes libros manuscritos de fórmulas matemáticas. Se está preparando ahora una edición de sus obras. El estado en que se hallaban todos estos manuscritos atestiguan las dificultades domésticas con que tropezó en el último tercio de su vida. Entre las montañas de papeles fueron desenterrados platos, con restos de comidas, en una cantidad suficiente para poder hacer la felicidad de cualquier ama de casa. Durante este último período Hamilton vivió como un recluso, sin darse cuenta de los alimentos que le servían mientras trabajaba, obsesionado por la idea de que el último tremendo esfuerzo de su genio magnífico inmortalizaría a él y a su amada Irlanda, y dejaría para siempre inconmovible una contribución matemática a la ciencia como no había tenido lugar desde los Principia de Newton.

Sus primeros trabajos, sobre los cuales reposa su gloria imperecedera, eran considerados por su autor como cosa de poca importancia frente a lo que él creía su obra maestra. Al final de sus días Hamilton fue un hombre humilde y devoto que no sentía ansiedad por su reputación científica. "Desde hace mucho tiempo he admirado la descripción que hace Ptolomeo de su gran maestro astronómico Hiparco, como un hombre que amó el trabajo y que amó la verdad. Será mi epitafio".

Capítulo Vigésimo
GENIO Y ESTUPIDEZ

GALOIS

Contra la estupidez los mismos dioses luchan inútilmente.

Schiller

Estaba escrito que a Abel lo mataría la pobreza, y a Galois la estupidez. En toda la historia de la ciencia no hay ejemplo más completo del triunfo de la crasa estupidez sobre el indomable genio que el proporcionado por la vida extraordinariamente breve de Evariste Galois. La exposición de sus infortunios puede constituir un monumento siniestro para los pedagogos vanidosos, para los políticos inescrupulosos y para los académicos engreídos. Galois no era un "ángel inútil", pero hasta su magnífica capacidad tenía que caer vencida ante la estupidez que se alineó contra él, y Galois destrozó su vida luchando con los necios, uno tras otro.

Los primeros once años de la vida de Galois fueron felices. Sus padres vivían en la pequeña aldea de Bourg-la-Reine, en las cercanías de París, donde Evariste nació el 25 de octubre de 1811. Nicolás Gabriel Galois, el padre de Evariste, era una verdadera reliquia del siglo XVIII, hombre cultivado, intelectual, saturado de filosofía, apasionado enemigo de la realeza y ardiente defensor de la libertad. Durante los Cien Días, después de la huida de Napoleón de la isla de Elba, Galois fue elegido alcalde de la aldea, y después de Waterloo conservó su cargo sirviendo fielmente al Rey. Servía de sostén a los aldeanos frente al sacerdote y amenizaba las reuniones sociales recitando poesías a la moda antigua, que él mismo componía. Estas actividades innocuas serían más tarde la ruina de este hombre. De su padre, Evariste heredó la facilidad para versificar y el odio a la tiranía y a la bajeza.

Hasta la edad de 12 años, Galois no tuvo más maestro que su madre, Adélaide-Marie Demante. Algunos de los rasgos del carácter de Galois fueron heredados de su madre, que procedía de una familia de distinguidos juristas. Su padre parece que descendía de los tártaros. Dio a su hija una educación humanista y religiosa, que ella, a su vez, trasmitió a su hijo mayor, no en la forma en que la había recibido, sino unida a un estoicismo viril característico de su mentalidad. Adélaide no rechazó el cristianismo ni lo aceptó sin discusión; simplemente comparó sus doctrinas con las de Séneca y Cicerón, formando así su moralidad básica. Sus amigos la recuerdan como una mujer de carácter fuerte, con una mentalidad generosa y cierta vena de originalidad bromista, que a veces la inclinaba a la paradoja. Murió en 1872, teniendo 84 años. Hasta sus últimos días conservó el completo vigor de su inteligencia. Ella, como su marido, odiaba la tiranía.

No se tiene noticia de que las familias de los progenitores de Galois se caracterizaran por su talento matemático. El genio matemático propio de Galois apareció como una explosión, probablemente en los primeros años de su adolescencia. Fue un niño cariñoso y más bien serio, aunque solía intervenir en las alegres fiestas en honor de su padre, en las que también componía poesías y diálogos para entretener a los asistentes. Todo esto cambió en cuanto fue objeto de una mezquina persecución y de una estúpida incomprensión, no por parte de sus padres, sino de sus maestros.

En 1823, teniendo 12 años, Galois ingresó en el liceo de Louis le Grand en París. Aquel liceo era algo terrible. Dominado por un director que más que un maestro era un carcelero, aquel lugar semejaba una prisión, y en realidad lo era. La Francia de 1823, aun recordaba la Revolución. Era una época de conspiraciones y contraconspiraciones, de tumultos y rumores de revolución. Todo esto encontraba eco en el liceo. Sospechando que el director planeaba volver a traer a los jesuitas, los estudiantes protestaron, negándose a cantar en la capilla. Sin notificarlo a sus padres, el director expulsó a los muchachos que según él eran más culpables. Se encontraron en la calle. Galois no estaba entre ellos, pero quizá hubiera sido mejor que así hubiera sido.

Hasta entonces la tiranía constituía una simple palabra para este muchacho de 12 años, pero ahora la veía en acción, y esta visión deformó una parte de su carácter durante toda su vida. Sintió una rabia incontenible. Sus estudios, debido a la excelente instrucción humanista de su madre marcharon perfectamente, y Galois obtuvo premios. Pero también ganó algo más duradero que un premio, la tenaz convicción, exacta o equivocada, que ni el temor ni la más severa disciplina pueden extinguir la idea de justicia en las mentes jóvenes que desde el principio hacen un culto de ella con devoción abnegada. Esto es lo que le enseñaron sus compañeros con su valor. Galois jamás olvidó su ejemplo, pero era demasiado joven para no quedar amargado.

El año siguiente marca otra crisis en la vida del muchacho. Su interés por la literatura y por los clásicos terminó por el aburrimiento; su genio matemático ya despuntaba. Sus maestros advirtieron el cambio, el padre de Evariste fue informado, y el muchacho continuó sus interminables ejercicios de retórica, latín y griego. Su trabajo fue considerado mediocre, su conducta poco satisfactoria, y los maestros tenían cierta razón. Galois tuvo que seguir ocupándose de aquellas materias que su genio rechazaba. Fatigado y disgustado prestaba una atención superficial, y seguía sus estudios sin esfuerzo ni interés. La Matemática era ensenada como una ayuda para la grave tarea de digerir los clásicos, y los discípulos de los diversos grados y de distintas edades consideraban el curso de Matemática elemental de escasa importancia en comparación con sus restantes estudios.

Durante este año de agudo aburrimiento Galois comenzó a asistir al curso regular de Matemática. La espléndida Geometría de Legendre abrió su camino. Se dice que dos años eran el tiempo usual empleado por los muchachos más devotos de la Matemática para comprender a Legendre. Galois leyó la Geometría desde el principio al fin tan fácilmente como otros muchachos leen una aventura de piratas. El libro despertó su entusiasmo. No era un manual escrito por un cualquiera, sino una obra maestra compuesta por un matemático creador. Una sola lectura fue suficiente para revelar la estructura global de la Geometría elemental con una claridad cristalina al fascinado muchacho. Pronto la dominó.

Su reacción ante el Álgebra es interesante. No le plació al principio, por una razón que comprenderemos al examinar el tipo mental de Galois. No disponía de un maestro corno Legendre que le inspirara. El texto de Álgebra era un manual sencillo y simple, y Galois le dio de lado. Carecía, según Galois decía, de ese chispazo de creación que sólo puede dar un matemático genial. Habiéndose familiarizado con el gran matemático a través de su obra, Galois comenzó a trabajar por su cuenta. Sin importarle los pesados deberes impuestos por sus maestros, Galois se dirigió directamente para aprender Álgebra al gran maestro de la época, a Lagrange. Más tarde leyó las obras de Abel. El muchacho de 14 6 15 años, absorbía las obras maestras del análisis algebraico dirigidas a matemáticos profesionales maduros; las memorias sobre la resolución numérica de las ecuaciones, la teoría de funciones analíticas y el cálculo de funciones. Sus ejercicios en la clase eran mediocres; el curso era demasiado trivial para un genio matemático, e innecesario para dominar la verdadera Matemática.

El peculiar talento de Galois le permitía realizar casi completamente de memoria las más difíciles operaciones matemáticas. La insistencia de los maestros sobre detalles que le parecían obvios o superficiales le exasperaban, haciéndole perder los estribos. De todos modos, obtuvo el premio en los exámenes generales. Para asombro de maestros y compañeros entró en su propio reino por asalto, dándoles luego la espalda.

Con esta primera demostración de su enorme capacidad, el carácter de Galois sufrió un profundo cambio. Sabiendo que estaba muy cerca de los grandes maestros del Análisis algebraico, sentía un inmenso orgullo, y deseaba colocarse en primera fila para compararse con ellos. Su familia, hasta su extraordinaria madre, le encontró un extraño. En el colegio parece que inspiró una curiosa mezcla de temor y de angustia a sus maestros y compañeros. Sus maestros eran gentes buenas y pacientes, pero estúpidas, y para Galois la estupidez era un pecado imperdonable. Al comenzar el año se referían a él diciendo que era "muy amable, lleno de inocencia y buenas cualidades, pero... “, continuaban diciendo, “existe algo extraño en él". No hay duda que así era. El muchacho tenía un talento desusado. Algo más tarde los maestros afirmaban que no era "perverso", sino simplemente original y extravagante, y se quejaban de que le divirtiera atormentar a sus compañeros. Hay en todo esto mucho de crítica, pero hay que reconocer que no sabían apreciar lo que Galois era. El muchacho había descubierto la Matemática, y ya se sentía guiado por su demonio. Al terminar el curso los maestros decían que sus extravagancias le habían enemistado con todos sus compañeros", y observan además que "algo misterioso existe en su carácter". Y lo que es peor, le acusaban de "ser ambicioso y de tener el deseo de parecer original". Pero algunos de sus profesores admiten que Galois se distinguía en la Matemática. Por lo que a la retórica se refiere, los maestros cometen un sarcasmo al decir “su talento es una leyenda a la que no damos crédito". Tan sólo ven extravagancia y excentricidad en las tareas realizadas cuando Galois se digna prestar atención, y además fatiga a sus maestros por su incesante "disipación". Al hablar de disipación no se refieren aun vicio, pues Galois no albergaba ninguno; tan sólo se trata de una palabra demasiado fuerte para referirse a la incapacidad de un genio matemático de primera categoría para disipar su inteligencia en las futilidades de la retórica explicada por pedantes.

Un hombre, que demuestra así su visión pedagógica, declaró que Galois era tan capaz para los estudios literarios como lo era para la Matemática. Galois quedó conmovido por la amabilidad de este maestro, y prometió dedicarse a la retórica. Pero su demonio matemático surgió ahora en todo su esplendor, y el pobre Galois cayó en desgracia. Al poco tiempo, el profesor que había expresado esa opinión contraria, se unió a la mayoría, y el voto desfavorable fue unánime, Galois fue considerado como incapaz para salvarse, "engreído por un insufrible deseo de originalidad". Pero el pedagogo se redimió con un excelente y exasperado consejo. Si lo hubiera seguido Galois podría haber vivido hasta los 60 años. "La locura matemática domina a este muchacho. Pienso que sus padres deberían dedicarle tan sólo a la Matemática. Aquí está perdiendo el tiempo, y todo lo que hace es atormentar a sus maestros y perturbarse".

Teniendo 16 años, Galois cometió un curioso error. Sin saber que Abel estuvo convencido, al comienzo de su carrera, de haber hecho lo que era imposible, resolver la ecuación general de quinto grado, Galois repitió el error. Durante cierto tiempo, aunque breve, creyó haber logrado lo que no puede lograrse. Esta es una de las grandes analogías en las carreras de Abel y Galois.

Mientras Galois, a la edad de 16 años, había iniciado su carrera de descubrimientos fundamentales, su maestro matemático Vernier, gravitaba sobre él como una gallina que ha empollado un aguilucho y no sabe como lograr que la inquieta criatura se contente con el fango del corral. Vernier pedía a su discípulo que trabajara sistemáticamente. El consejo no fue seguido, y Galois, sin preparación, se presentó a los exámenes de ingreso en la Escuela Politécnica. Esta gran escuela, madre de los matemáticos franceses, fundada durante la Revolución francesa (algunos dicen que por Monge), para dar a los ingenieros civiles y militares la mejor educación científica en Matemática que podía darse en el mundo, atrajo al ambicioso Galois. En la Politécnica su talento matemático sería reconocido y alentado. Y su deseo de libertad quedaría satisfecho. ¿No era en los viriles y audaces jóvenes de la Politécnica, donde estaban los futuros jefes del ejército, una espina siempre clavada en los planes reaccionarios que pretendían anular la gloriosa obra de la Revolución, al intentar atraer a los corrompidos sacerdotes y defender el derecho divino de los reyes? Los indómitos politécnicos, al menos a los ojos juveniles de Galois, no eran pulidos retóricos, como las ceñudas nulidades de Louis le Grand, sino una liga de buenos patriotas. Los acontecimientos iban a demostrarle, al menos en parte, que tenía razón en sus apreciaciones.

Galois fracasó en los exámenes. No estaba sólo en su creencia de que el fracaso era debido a una injusticia estúpida; los mismos compañeros a quienes él había atormentado estaban asombrados. Creían que Galois tenía un genio matemático extraordinario, y culpaban a la incompetencia de los jueces. Casi un cuarto de siglo más tarde, Terquem, editor de los *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la revista matemática dedicada a los candidatos a las escuelas Politécnica y Normal, recordó a sus lectores que la controversia no había aún terminado. Comentando el fracaso de Galois y los inescrutables designios de los jueces en otro caso, Terquem observa: "Un candidato de inteligencia superior se pierde ante un juez de inteligencia inferior. *Hic ego barbarus sum quia non intelligor illis* (Debido a que *ellos* no *me* comprenden, soy un bárbaro). Los exámenes son misterios ante los cuales me inclino. Como los misterios de la teología, la razón debe admitirlos con humildad, sin intentar comprenderlos". Para Galois el fracaso fue casi el retoque final. Le concentró sobre sí mismo y le amargó toda su vida.

En 1828 Galois tenía 17 años. Este fue su gran año. Encontró un hombre que tuvo la capacidad de comprender su genio, Louis-Paul-Êmile Richard (1795-1849), maestro de Matemáticas especiales en Louis le Grand. Richard no era un pedagogo convencional, sino un hombre de talento, que seguía las conferencias superiores de Geometría en la Sorbona durante el tiempo que tenía libre, manteniéndose al tanto de los progresos de los matemáticos de su época para transmitirlos a sus discípulos. Tímido y sin ambiciones para sí mismo proyectaba su talento sobre sus alumnos. El hombre que no había dado un paso para favorecer sus intereses, no escatimaba sacrificios, por grandes que fueran, cuando el futuro de uno de sus discípulos estaba en peligro. En su celo para hacer progresar la Matemática por la obra de hombres más capaces, se olvidó completamente de sí mismo, aunque sus amigos le recomendaron publicara sus investigaciones, y a su inspirada enseñanza han rendido tributo más de uno de los grandes matemáticos franceses del siglo XIX: Leverrier, descubridor con Adams, por puro análisis matemático, del planeta Neptuno; Serret, un geómetra de reputación, autor de una obra clásica sobre Álgebra superior en la que hace la primera exposición sistemática de la teoría de Galois de las ecuaciones; Hermite, maestro algebrista y aritmético de primera categoría, y por último Galois.

Richard reconoció inmediatamente quién era el joven que había caído en sus manos, "el Abel de Francia". Las soluciones originales a los problemas difíciles que Galois propuso, eran orgullosamente explicadas en la clase con justo elogio para el joven autor, y Richard propuso, desde el sillón del maestro, que el extraordinario discípulo fuera admitido en la Politécnica sin examen. Concedió a Galois el primer premio, y en su informe escribió las siguientes palabras: "Este discípulo tiene una marcada superioridad sobre todos sus compañeros; se ocupa únicamente de las partes más complicadas de la Matemática". Este juicio encierra una gran verdad. Galois, a los 17 años, hacía descubrimientos de extraordinaria significación en la teoría de ecuaciones, descubrimientos cuyas consecuencias no han terminado aún, transcurrido un siglo. El primero de marzo de 1829, Galois publicó su primer trabajo sobre fracciones continuas. En él no hay indicio alguno de las grandes proezas que iba a realizar, pero anunciaba a sus compañeros que no se trataba de un escolar más, sino de un matemático creador.

El principal matemático francés de la época era Cauchy. En la fecundidad de la invención, Cauchy ha sido igualado por muy pocos, y como hemos visto, el volumen de sus obras completas sólo es superado por las producciones de Euler y Cayley[1], los matemáticos más prolíficos de la historia. Siempre que la Academia de Ciencias deseaba una autorizada opinión de los méritos de una obra matemática sometida a su consideración, recurría a Cauchy. De ordinario era un juez rápido y justo, pero algunas veces cometió errores. Por desgracia, estos errores fueron muy importantes. A la indiferencia de Cauchy la Matemática debe dos de los más grandes desastres de su historia: el desprecio por Galois y el ruin tratamiento concedido a Abel. De lo último Cauchy tan sólo es culpable en parte, pero su responsabilidad es única en el caso de Galois.

Galois resumió los descubrimientos fundamentales que había hecho a la edad de 17 años en una memoria, que sometió a la consideración de la Academia. Cauchy prometió presentarla, pero se olvidó hacerlo. Para remachar el clavo de su ineptitud, perdió el manuscrito del autor. Este fue sólo el primero de una serie de desastres análogos, que provocaron el torvo desprecio del muchacho por las academias y académicos, y su fiero odio contra toda la estúpida sociedad en que se veía condenado a vivir.

A pesar de su genio bien demostrado, el perseguido muchacho no encontró paz en el colegio. Las autoridades no le permitían cultivar el rico campo de sus descubrimientos, distrayéndole con mezquinas tareas, e incitándole a la manifiesta revuelta con sus continuos consejos y castigos. Los maestros sólo pudieron encontrar en Galois un absoluto desprecio y una férrea determinación a ser matemático. Ya lo era, pero los maestros no lo sabían.

Otros dos desastres, ocurridos cuando tenía 18 años, modelaron el carácter de Galois. Por segunda vez se presentó a los exámenes de ingreso en la Politécnica, y hombres que no eran dignos de afilar sus lápices iban a ser sus jueces. El resultado fue el que podía sospecharse. Galois fracasó. Esta era su última tentativa; las puertas de la Politécnica se cerraron para siempre para él.

Su examen ha llegado a constituir una leyenda bien conocida. La costumbre de Galois de trabajar casi completamente de memoria constituía una grave desventaja cuando se hallaba ante la pizarra. La tiza y la esponja le desconcertaron, hasta que encontró la forma de hacer un adecuado uso de la última. Durante la parte oral de los exámenes, uno de los inquisidores se aventuró a discutir con Galois una dificultad matemática. El hombre estaba tenazmente equivocado. Dando por perdidas sus esperanzas, fracasada toda su vida como matemático y como campeón de la libertad democrática en la Politécnica, Galois perdió la paciencia. Se dio cuenta de que oficialmente fracasaba, y en un acceso de rabia y desesperación arrojó la esponja al rostro de su atormentador.

El desastre final fue la muerte trágica del padre de Galois. Como alcalde de Bourg-la-Reine, el anciano Galois era el blanco de las intrigas clericales de la época, especialmente por haber

[1] El volumen de los trabajos de Euler indudablemente excederá al de los de Cayley cuando se hayan impreso todas sus obras.

apoyado siempre a los aldeanos contra el sacerdote. Después de las tempestuosas elecciones de 1827, un joven sacerdote lleno de recursos organizó una campaña contra el alcalde.
Aprovechándose del bien conocido talento del viejo Galois para versificar, el ingenioso sacerdote compuso una serie de estúpidos versos contra un miembro de la familia del alcalde, firmándolos con el nombre de éste y los hizo circular entre los habitantes. El pobre alcalde sufrió de manía persecutoria. Durante la ausencia de su mujer huyó a París, y en una habitación cercana a la escuela donde su hijo realizaba sus estudios, se suicidó. Mientras se realizaban los funerales estallaron serios disturbios. Los habitantes irritados lanzaron piedras, y el sacerdote fue herido en la frente. Galois vio descender el ataúd de su padre a la sepultura en medio de un terrible tumulto. Más tarde, sospechando que la injusticia que tanto odiaba estaba esparcida por doquier, no encontraba a nadie bueno.
Después de su segundo fracaso en la Politécnica, Galois volvió a la escuela para seguir la carrera de maestro. La escuela tenía ahora un nuevo director, algo cobarde, contemporizador con los realistas y clericales. La tímida contemporización de este hombre para los movimientos políticos que entonces conmovían a Francia tuvo una influencia trágica sobre los últimos años de Galois. Perseguido y maliciosamente incomprendido por sus preceptores, Galois se preparó por sí mismo para los exámenes finales. Los comentarios de los examinadores son interesantes. En Matemática y física el juez escribe: "Muy bien" El examen oral final despierta los siguientes comentarios: "Este discípulo es algunas veces oscuro para expresar sus ideas, pero es inteligente y muestra un notable espíritu de investigador. Me ha comunicado algunos resultados nuevos en el Análisis aplicado". En literatura: "Este es el único estudiante que me ha respondido mal, no sabe absolutamente nada. Me han dicho que tiene una extraordinaria capacidad para la Matemática. Me asombra mucho, pues basándome en el examen creo que tiene escasa inteligencia. Si este discípulo es realmente lo que me ha parecido, dudo mucho que pueda ser un buen maestro". A lo cual Galois, recordando algunos de sus buenos maestros, podría haber replicado: "No lo permita Dios".
En febrero de 1830, teniendo 19 años, Galois fue al fin admitido en la Universidad. El profundo y seguro conocimiento que tenía de su propia capacidad se refleja en un gran desprecio por sus maestros y desde entonces continuó elaborando sus ideas en la mayor soledad. Durante este año compuso tres trabajos que abren nuevos campos. Estos trabajos contienen parte de su gran obra sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. En ellos iba más allá de donde habían llegado otros matemáticos, y Galois lleno de esperanzas resumió sus resultados, añadiendo otros nuevos, en una memoria, presentada a la Academia de Ciencias para aspirar al gran premio en Matemática. Este premio era aún la cinta azul para la investigación matemática y tan sólo los más distinguidos matemáticos de la época podían concurrir a él. Los jueces aceptaron que la memoria de Galois era digna del premio por su originalidad. El joven dice con absoluta justicia: "He realizado investigaciones que detendrán en las suyas a muchos sabios".
El manuscrito fue entregado en la secretaría. El secretario lo llevó a su casa para examinarlo, pero murió antes de que tuviera tiempo de hacerlo. Cuando después de su muerte fueron revisados sus papeles, no se encontraron ni indicios del manuscrito, y esto fue lo último que Galois supo. Nadie puede culparle de que atribuyera sus infortunios al algo más que a la ciega casualidad. Después de la indiferencia de Cauchy una repetición del mismo tipo parece demasiado providencial para ser una mera casualidad. "El genio es condenado, por una organización social maliciosa, a una eterna negativa de justicia, en favor de la aduladora mediocridad". Su odio creció, y se entregó a la política, militando en el republicanismo, que era entonces un radicalismo perseguido.
Los primeros brotes de la Revolución de 1830 llenaron a Galois de júbilo. Intentó llevar a sus compañeros a la lucha, pero estos dudaron, y el director, que no veía las cosas claras, les pidió

prometieran por su honor no abandonar la Escuela. Galois se negó a dar su palabra, y el director le aconsejó permaneciera allí hasta el día siguiente. En su plática, el director mostró una singular falta de tacto y una ausencia total de sentido común. Enfurecido, Galois intentó escapar durante la noche, pero los muros eran demasiado altos para él. Mientras en los "tres días gloriosos" los heroicos jóvenes de la Politécnica se lanzaban a las calles para escribir la historia, el director de la Escuela mantuvo prudentemente encerrados a sus discípulos. De este modo se preparaba para asociarse a los vencedores. La revuelta triunfó, y el astuto director fue generosamente conducido por sus discípulos a la disposición del gobierno provisional. Estos episodios dieron el último toque al credo político de Galois. Durante las vacaciones, asombró a su familia y a sus amigos con su violenta defensa de los derechos de las masas.

Los últimos meses de 1830 fueron tan turbulentos como los que suelen tener lugar después de un alzamiento político. Los posos caen al fondo, la espuma sube a la superficie, y el elemento moderado de la población queda suspendido indeciso entre los dos. Galois, encerrado en el colegio, comparó las vacilaciones contemporizadoras del director y la débil lealtad de los estudiantes con la audacia de los jóvenes de la Politécnica. Incapaz de tolerar la humillación de su inactividad, escribió una punzante carta a la *Gazette des Écoles*, donde manifestaba dirigiéndose a los estudiantes como al director, su opinión de lo que era su deber. Los estudiantes pudieron haberle ayudado, pero les faltó valor y Galois fue expulsado. Lleno de ira, Galois escribió una segunda carta a la *Gazette*, dirigida a los estudiantes. "Nada os pido para mí, escribía, pero apelo a vuestro honor y a vuestra conciencia". La carta no recibió contestación alguna, pues aquellos a quien Galois se dirigía no tenían honor ni conciencia.

Nuevamente en la calle y sin recursos Galois anunció una clase privada de Álgebra superior, que tendría lugar una vez por semana. Tenía entonces 19 años, y este matemático creador de primera categoría anunciaba lecciones que no encontrarían oyentes. El curso iba a abarcar "una nueva teoría de las imaginarias" (la que ahora se conoce como la teoría de las "imaginarias de Galois", de gran importancia en Álgebra y en la teoría de números), la resolución de las ecuaciones por radicales y la teoría de números y funciones elípticas tratadas por Álgebra pura". Toda su obra. Al no encontrar discípulos, Galois abandonó temporalmente la Matemática, e ingresó en la artillería de la Guardia Nacional, dos de cuyos cuatro batallones estaban compuestos casi totalmente de grupos liberales que se llamaban a sí mismos "Amigos del pueblo". No había aún renunciado totalmente a la Matemática. Alentado por Poisson, y en un último y desesperado esfuerzo para triunfar envió una memoria sobre la resolución general de ecuaciones, ahora llamada la teoría de Galois, a la Academia de Ciencias. Poisson, cuyo nombre es recordado siempre que son estudiadas las teorías matemáticas de la gravitación, de la electricidad y del magnetismo, fue el juez. Redactó un informe para salir del paso. La memoria, afirmaba Poisson, es "incomprensible", pero no nos dice cuánto tiempo había empleado para llegar a esta notable conclusión. Fue la última gota en el vaso lleno. Galois dedicó todas sus energías a la política revolucionaria: "Si se necesita un cadáver para poner en movimiento al pueblo, escribía, yo daré el mío".

El 9 de mayo de 1831 marcó el comienzo del fin. Doscientos jóvenes republicanos asistieron a un banquete para protestar contra la orden real que disolvía la artillería a la que Galois se había incorporado. Fueron pronunciados brindis en honor de las revoluciones de 1789 y 1793, de Robespierre y de la Revolución de 1830. La atmósfera era revolucionaria y desafiante. Galois se levantó para pronunciar un brindis, con su vaso en una mano y su cortaplumas abierto en la otra. "Para Luis Felipe" (el rey). Sus compañeros no comprendieron el propósito del brindis, y protestaron violentamente. Pero vieron el cortaplumas abierto, y al interpretar el ademán como una amenaza contra la vida del rey, manifestaron ruidosamente su aprobación. Un amigo de

Galois, viendo al gran Alejandro Dumas y a otras notables personalidades pasar a través de las ventanas abiertas, pidió a Galois que se sentara, pero el tumulto continuó. Galois fue el héroe del momento, y los artilleros se lanzaron a la calle para celebrar su exuberancia, alborotando toda la noche. Al día siguiente Galois fue detenido en la casa de su madre, siendo llevado a la prisión de Santa Pelagia.

Un astuto abogado, con la ayuda de los amigos leales de Galois, ideó una defensa ingeniosa, afirmando que su defendido había dicho. "Para Luis Felipe, *si llega a ser traidor"*. El cortaplumas abierto tenía una fácil explicación; Galois lo usaba para cortar el pollo que estaba comiendo. Esto era todo lo que había ocurrido. Las palabras de su brindis, según los amigos que juraban haberlas oído, no fueron, escuchadas debido al tumulto, y tan sólo los que estaban muy cerca del orador supieron lo que había dicho. Galois no quiso acogerse a ese recurso.

Durante el juicio, la condena de Galois fue de un marcado desprecio para el tribunal de sus acusadores. Sin importarle la sentencia, se entregó a una apasionada diatriba contra todas las fuerzas de la injusticia política. El juez era un hombre humano, que tenía hijos. Advirtió al acusado que su conducta poco le favorecía, y le ordenó callar. La defensa discutió la cuestión acerca de si el restaurante donde ocurrió el incidente era o no un lugar público al ser usado para un banquete semiprivado. Sobre este delicado punto de la ley dependía la libertad de Galois, pero era evidente que tanto el tribunal como el jurado estaban conmovidos por la juventud del acusado. Después de una deliberación de diez minutos, el jurado pronunció un veredicto donde negaba la culpabilidad. Galois recogió su cortaplumas de la mesa, lo cerró, lo introdujo en su bolsillo y abandonó la sala sin pronunciar una palabra.

Su libertad no duró largo tiempo. Antes de transcurrir un mes, el 14 de julio de 1831, fue detenido nuevamente, esta vez como una medida de precaución. Los republicanos iban a celebrar una conmemoración y Galois, por ser un "radical peligroso" a los ojos de las autoridades, debía ser encerrado, aun cuando no *pesara sobre él cargo alguno.* Ahora, el “peligroso republicano Evariste Galois" se hallaba donde no le era posible iniciar una revolución. Pero se tropezaba con dificultades para hallar una acusación legal que permitiera llevarle a los tribunales. En realidad estaba armado hasta los dientes cuando fue detenido, pero no ofreció resistencia alguna. Galois no era necio. ¿Podrían acusarle de conspirar contra el gobierno? Esto era demasiado fuerte, y no sería posible convencer al jurado. Después de dos meses de pensar en el problema, consiguieron encontrar un cargo. Cuando Galois fue detenido llevaba su uniforme de artillero. La artillería había sido disuelta. Por tanto, Galois era culpable de uso ilegal de uniforme. Esta vez no escaparía. Un amigo, detenido como él, estuvo tres meses en la prisión, Galois seis. Fue encarcelado en Santa Pelagia hasta el 29 de abril de 1832. Su hermana dice que pensaba no volver a ver el sol hasta que tuviera cincuenta años. ¿Por qué no? "La justicia debe predominar, aun cuando los ciclos se derrumben".

La disciplina en la cárcel para los detenidos políticos no era severa, siendo tratados con una humanidad razonable. La mayoría empleaba sus horas paseando por el patio o emborrachándose en la cantina, un negocio privado del director de la prisión. Galois, con su rostro sombrío, sus hábitos virtuosos, y su perpetuo aspecto de intensa concentración, era objeto de burla de los alegres borrachines. Se dedicó a sus estudios matemáticos, pero no podía soportar los insultos que le dirigían.

“¿No bebes más que agua? Sepárate del partido republicano y dedícate a tu Matemática. Sin vino y sin mujeres jamás serás un hombre". No pudiendo tolerar más bromas, Galois se apoderó de una botella de coñac, y, sin saber lo que era, apuró su contenido. Un cariñoso compañero de prisión, le cuidó hasta que logró restablecerse. Su humillación, al darse cuenta de lo que había hecho, fue muy grande.

Finalmente pudo salir de aquel lugar, que un escritor francés de la época llamaba la cloaca más pestilente de París. La epidemia de cólera de 1832 fue causa de que las solicitas autoridades trasladaran a Galois a un hospital, el 16 de marzo. El "importante prisionero político", que había amenazado la vida de Luis Felipe, era demasiado precioso para ser expuesto a la epidemia.
Como Galois había dado su palabra de no huir, tuvo muchas ocasiones de recibir visitas. Y en esa época se desarrolló su única aventura amorosa. En ella, como en todas las otras cosas, fue desafortunado. Alguna coqueta de baja estofa ("quelque coquette de bas étage") le inició. Galois estaba disgustado con su amor, consigo mismo y con su amante. A su buen amigo Auguste Chevalier dirigió las siguientes palabras. "Tu carta llena de apostólica unción me ha traído algo de paz. Pero ¿cómo borrar emociones tan violentas como las que he experimentado?... al volver al leer tu carta observo una frase en la que me acusas de haberme embriagado por el fango de un mundo podrido, que ha deshecho mi corazón, mi cabeza y mis manos... embriagado. Estoy desilusionado de todo, hasta del amor y de la fama. ¿Cómo puede corromperme un mundo al que detesto?". Esta carta está fechada el 25 de mayo de 1832. Cuatro días más tarde recobraba la libertad. Pensaba ir al campo para reposar y meditar.
No se sabe claramente lo que ocurrió el 29 de mayo. Los párrafos de dos cartas permiten suponer lo que se acepta corrientemente como la verdad. Galois fue perseguido por numerosos enemigos políticos inmediatamente después de su libertad. Estos "patriotas" querían impulsarle a la lucha, y se las arreglaron para hacer caer al infortunado Galois en una cuestión de "honor". En una "carta a todos los republicanos", fechada, el 29 de mayo de 1832, Galois escribe:
"Pido a los patriotas y a mis amigos no me reprochen que muera por otra causa que no es mi país. Muero víctima de una infame mujerzuela. Mi vida se extingue en una querella miserable. ¡Oh! ¿Por qué morir por una cosa tan trivial, morir por algo tan despreciable?... Perdón para aquellos que me han matado, han obrado de buena fe".
En otra carta a dos amigos desconocidos dice:
"He sido desafiado por dos patriotas, me era imposible negarme. Os pido perdón por no haberos avisado a ninguno de los dos. Pero mis contrincantes me han pedido por mi honor que no avise a ningún patriota. Vuestra tarea es muy sencilla. Probar que combatí a pesar de mí mismo, es decir, después de haber agotado todos los medios de llegar a un arreglo... Conservad mi recuerdo ya que el destino no me ha dado la- suficiente vida para que mi país conozca mi nombre. Vuestro amigo

E. GALOIS"

Estas fueron las últimas palabras que escribió. Aquella noche, antes de redactar estas cartas, empleó las horas que pasaban rápidamente en escribir febrilmente su última voluntad científica y su testamento, añadiendo, en su lucha contra el tiempo, algunas de las grandes ideas que su cerebro albergaba, antes de que la muerte, que preveía, las borrara. De cuando en cuando, suspendía la lectura para garrapatear en el margen del papel "No tengo tiempo, no tengo tiempo"; y luego seguía planteando nuevos problemas. Lo que escribió en estas últimas y desesperadas horas antes de alumbrar la aurora, ha mantenido atareados durante siglos a varias generaciones de matemáticos. Halló, de una vez para todas, la verdadera solución de un enigma que atormentó a los matemáticos durante centurias: ¿en qué condiciones se puede resolver una ecuación? Pero este hallazgo es tan sólo una cosa entre otras muchas. En su gran obra, Galois usó la teoría de grupos (véase capítulo sobre Cauchy) con excelente resultado. Galois era, en efecto, uno de los grandes precursores de esta abstracta teoría, que en la actualidad tiene fundamental importancia en toda la Matemática.
Aparte de las cartas mencionadas, Galois confió a su albacea científico algunos de los manuscritos que debían ser entregados a la Academia de Ciencias. Catorce años más tarde, en

1846, Joseph Liouville publicó algunos de los manuscritos en el *Journal des Mathémaliques pures et appliqués.* Liouville, distinguido y original matemático, editor del gran Journal, escribió como introducción los siguientes párrafos:

"La obra principal de Evariste Galois tiene como objeto las condiciones para resolver ecuaciones por radicales. El autor establece los fundamentos de una teoría general que aplica en detalle a las ecuaciones cuyo grado es un número primo. A la edad de 16 años, y siendo estudiante del liceo Louis le Grand... Galois se ocupó de este difícil tema". Liouville afirma luego que los jueces de la Academia rechazaron las memorias de Galois debido a su oscuridad. Continúa diciendo: "Un exagerado deseo de concisión fue la causa de este defecto, que debe ser evitado sobre todas las cosas, cuando se trata de los problemas abstractos y misteriosos del Álgebra pura. La claridad es, en efecto, lo que más se necesita cuando se intenta llevar al lector más allá de los caminos trillados hasta un territorio virgen. Como Descartes dice cuando las cuestiones transcendentales están en discusión habrá que ser trascendentalmente claro. Galois no hizo caso de este precepto, y podemos comprender por qué matemáticos ilustres deben haber intentado, con la severidad de su sabio juicio, llevar por el buen camino a un principiante lleno de genio, pero sin experiencia. El autor que censuraban estaba ante ellos, ardiente, activo, y él podía haberse aprovechado de su consejo.

"Pero ahora todo ha cambiado. Galois ya no vive. No nos entreguemos a inútiles críticas. Pasemos por alto los defectos y contemplemos los méritos". A continuación Liouville nos dice que estudió los manuscritos y encontró una perfecta joya que merece especial mención[2]

"Mi celo se vio premiado y experimenté un placer intenso cuando, después de haber llenado unas pequeñas lagunas, aprecié la completa exactitud del método mediante el cual Galois prueba especialmente este bello teorema: Para que una ecuación irreductible de primer grado se pueda resolver por radicales es necesario y suficiente que todas sus raíces sean funciones racionales de dos cualesquiera de ellas”.

Galois comunicó su voluntad a su fiel amigo Auguste Chevalier, a quien el mundo debe que se haya conservado. "Mi querido amigo, comienza diciendo, he hecho algunos nuevos descubrimientos en Análisis". Luego procede a describirlos, tratándose en realidad de descubrimientos que marcan una época. Concluye diciendo: "Pide a Jacobi o a Gauss que den públicamente su opinión. No respecto de la verdad, sino respecto de la importancia de estos teoremas. Más tarde habrá, algunas gentes, así lo espero, que encuentren provechoso descifrar toda esta confusión. *Je t'embrasse avec effusion.* E. Galois".

¡Confiado Galois! Jacobi era generoso; ¿qué podría decir Gauss? ¿Qué dijo de Abel? ¿Qué dejó de decir de Cauchy o de Lobatchewsky? Pese a su amarga experiencia Galois era aún un muchacho lleno de esperanzas.

En las primeras horas del 30 de mayo de 1832, Galois se enfrentó a su adversario en el "campo del honor". El duelo era a pistola, a 25 pasos. Galois cayó, atravesados los intestinos. Ningún cirujano estaba presente, y fue abandonado para que muriera donde había caído. A las 9 de la mañana un campesino que pasaba le condujo al hospital Cochin. Galois sabía que iba a morir. Ante la inevitable peritonitis, y conservando aún la completa posesión de sus facultades, rechazó los auxilios de un sacerdote. Quizá se acordó de su padre. Su hermano menor, el único de la familia que había sido advertido, llegó llorando. Galois intentó consolarle mostrando su estoicismo. "No llores, dijo, necesito todo mi valor para morir a los veinte años".

[2] La significación de este teorema será comprendida *si el* lector vuelve a leer los párrafos dedicados a Abel en el capítulo XVII

En las primeras horas de la mañana del 31 de mayo de 1832, Galois murió, teniendo 21 años. Fue enterrado en la fosa común del Cementerio del Sur, de modo que nada se sabe de los restos de Evariste Galois. Su monumento permanente consiste en sus obras, que llenan sesenta páginas.